



**KERNFORSCHUNGSANLAGE JÜLICH GmbH**

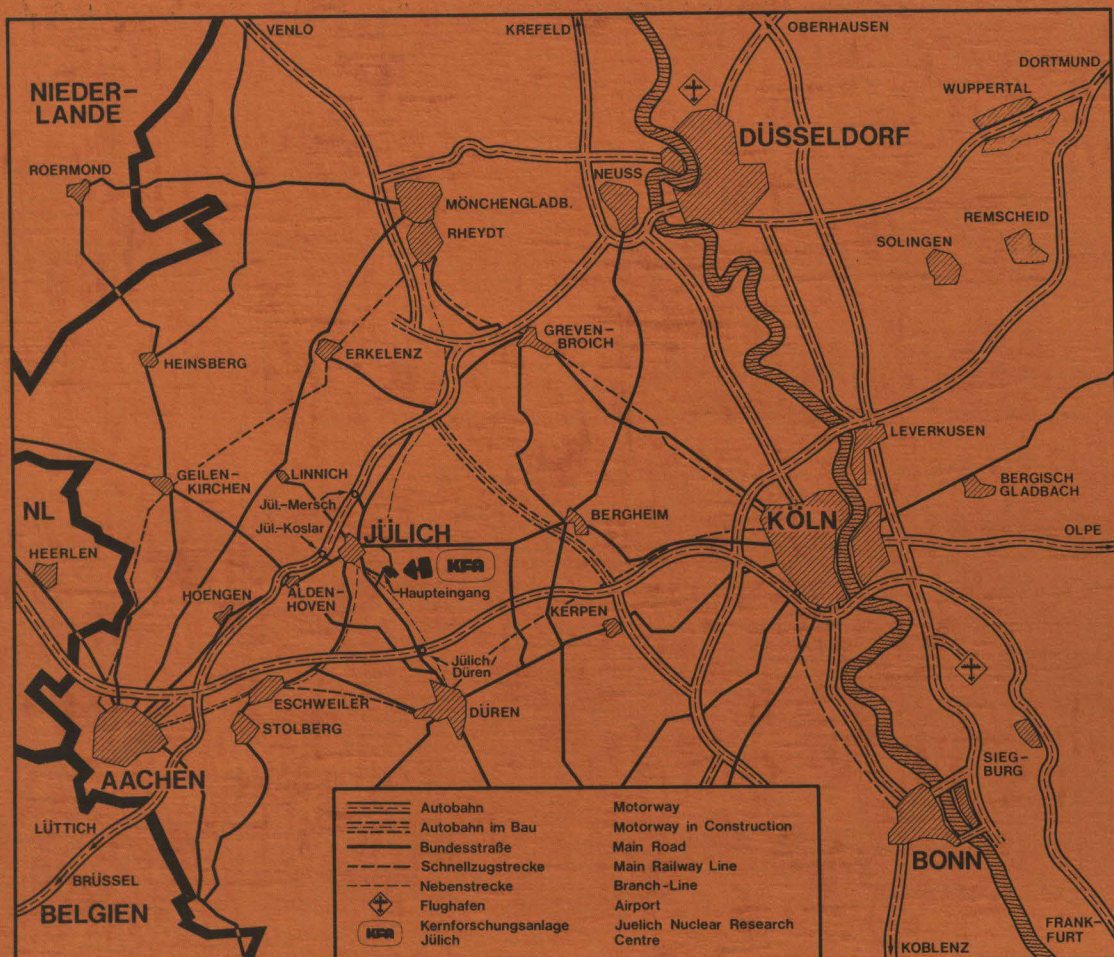
Institut für Kernphysik

**Coulombdissoziation  
bei nichtrelativistischen  
und relativistischen Energien**

von  
B. Hoffmann

**Jül - Spez - 131**  
**Oktober 1981**  
ISSN 0343-7639





Als Manuskript gedruckt

# **Spezielle Berichte der Kernforschungsanlage Jülich – Nr. 131**

Institut für Kernphysik Jül - Spez - 131

Zu beziehen durch: ZENTRALBIBLIOTHEK der Kernforschungsanlage Jülich GmbH

Postfach 1913 · D-5170 Jülich (Bundesrepublik Deutschland)

Telefon: 02461/610 · Telex: 833556 kfa d

# **Coulombdissoziation bei nichtrelativistischen und relativistischen Energien**

von

**B. Hoffmann**



	SEITE
0	Einleitung . . . . . iii
I	Nichtrelativistische Theorie
I.1	DWBA-Ansätze . . . . . 1
I.2	Deuteron-Wellenfunktion und $B(E1)$ -Wert . . . 4
I.3	Semiklassische Theorie der Coul.-Anregung . . 7
I.4	Erste Anwendungen . . . . . 9
I.5	Sommerfeld Methode . . . . . 19
I.6	Partialwellenzerlegung . . . . . 24
I.7	Strong Absorption Model (SAM) . . . . . 26
I.8	Ergebnisse für 15 MeV Deuteronen auf Thorium . . . . . 32
I.9	A-Systematik des totalen . . . . . 35 Wirkungsquerschnitts
II	Relativistische Theorie
II.1	Modell des harmonischen Oszillators . . . . 38
II.2	Relativistische Coulombanregung . . . . . 42
II.3	Weizsäcker Williams Methode . . . . . 44
II.4	Coul.Diss. des Deuteronen bei hohen Energien 46
III	Anregung von Riesenresonanzen
III.1	Differentielle Wirkungsquerschnitte . . . . 51
III.2	Totale Wirkungsquerschnitte . . . . . 57
III.3	M1 Anregung . . . . . 61
IV	Schlußfolgerungen . . . . . 63
	Anhang A . . . . . 64
	Anhang B . . . . . 70
	Anhang C . . . . . 76
	Literaturverzeichnis . . . . . 82
	Nachwort . . . . . 85

Coulombanregung, also die Anregung eines Projektils im elektromagnetischen Feld des Targetkernes (oder umgekehrt), kann die Desintegration des Projektils bewirken, wenn die Coulombanregung in einen gegen Teilchenemission instabilen Zustand führt. Für diesen Anregungsmechanismus brauchen die Ladungsverteilungen der beiden Kerne zu keinem Zeitpunkt der Reaktion zu überlappen. Diese Art der Desintegration nennt man Coulombdissoziation. Sie wurde zuerst bei lose gebundenen Kernen wie Lithium oder Beryllium untersucht (HA63), (GE77), (UN78). Diese Kerne haben eine ausgeprägte Resonanz aus der heraus sie zerfallen können; man spricht deshalb auch von sequentiellern Zerfall. Auch für Deuteronen, die keine Resonanz haben, ist solch ein Anregungsprozeß möglich und schon seit langem diskutiert worden (DA47), (MU51).

Im allgemeinen liegen die Zustände, aus denen heraus Teilchenemission möglich ist zu hoch, als daß sie durch Coulombanregung bevölkert werden könnten. Der Grund dafür liegt in dem Anwachsen des Adiabazitätsparameters, der die Anregungswahrscheinlichkeit exponentiell dämpft. Der Adiabazitätsparameter beschreibt anschaulich das Verhältnis von der Zeit, in der die beiden Kerne aneinander vorbeifliegen (Kollisionszeit), zu der typischen Schwingungsdauer im Projektil. Von der Kollisionszeit wiederum hängt das Frequenzspektrum des elektromagnetischen Feldes ab, welches auf das Projektil wirkt. Je kleiner die Kollisionszeit ist, desto höherliegende Zustände können angeregt werden.

Erst in jüngster Zeit ist es möglich geworden durch relativistische Projektilen diese Adiabazitätsgrenze zu überwinden (AL79), (BRG80). Damit ist die Coulombdissoziation zu einem wichtigen Prozess bei Stößen von relativistischen Ionen und Schwerionen geworden. Beispielsweise beobachtet man bei der Desintegration von  $^{16}\text{O}$  von 1.7 GeV/A (HE80), daß nicht alle Fragmente aus Prozessen stammen, bei denen die Ladungsverteilung von Target und Sauerstoff überlappen. Die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnittes für die Produktion der Fragmente  $^{16}\text{O}$ ,  $^{14}\text{O}$ ,  $^{12}\text{N}$  von der Kernladungszahl des Targets zeigt vielmehr, daß diese Fragmente durch Anregung der Dipolriesenresonanz in Sauerstoff und deren anschließendem Zerfall unter Emission von Neutronen bzw Protonen entstehen.

Den konkreten Anstoß zur vorliegenden Arbeit gaben die Ergebnisse der Experimente von J.Ernst et al in Bonn (BI80) (KL81), in denen der Aufbruch von 15 MeV Deuteronen untersucht wurde; hier wurde nicht erwartet, daß der Mechanismus der Coulombanregung bei solch niedrigen Energien überhaupt eine Rolle spielt.

Der Aufbruch eines Deuterons an einem Targetkern A stellt im Prinzip ein 3-Körper-Problem dar, jedenfalls solange man darauf verzichtet Reaktionen beschreiben zu wollen, in denen das Target selbst zerstört wird. Als 3-Körper-Problem mit den 3 Teilchen A,p,n im Endzustand ist es im Prinzip durch gekoppelte Integralgleichungen (Faddeevgleichungen) lösbar. Doch bisher haben die mathematischen Schwierigkeiten bei der Behandlung des langreichweitigen und nichtseparablen Coulombpotentials keine konkreten Rechnungen erlaubt (AL76) (SCHM74).

Stattdessen verwendet man die aus der Theorie der direkten Reaktionen bekannten DWBA-Ansätze zur Beschreibung von Stripping bzw Pick-up Reaktionen, bei denen sich allerdings nur zwei Teilchen im Endzustand befinden.

Spezialfälle dieser DWBA-Theorien angewandt auf den Aufbruch von Deuteronen sind die Coulombdissoziation und das Spectator break up Modell. Beide Modelle unterscheiden sich vor allem in der Beschreibung des 3-Teilchen-Endzustandes.

Das Spectator Modell geht auf Serber (SE47) zurück, der für 200 MeV Deuteronen die Stripping Reaktionen  $(d,n)$  bzw  $(d,p)$  untersuchte. Beim Spectator Modell wird angenommen, daß ein Konstituent des Projektils vom Target eingefangen wird, hingegen der Rest unverändert mit seiner vorigen Geschwindigkeit weiterfliegt. Eine Analyse der Breite der Geschwindigkeitsverteilung des Projektilfragments kann somit Auskunft über die Impulsverteilung (Fermibewegung) im Projektil geben.

Der Aufbruch von Deuteronen war bei höheren Energien gut durch auf dem Spectatormodel aufbauenden DWBA-Theorien von G.Baur et al (BA76) (PA78) beschrieben worden. Bei den Experimenten mit 15 MeV Deuteronen beobachtete man für Targets mit  $A > 119$  zunehmend Abweichungen von dieser Theorie. Besonders bei der Reaktion  $Th(d,p)$  war der berechnete Wirkungsquerschnitt für kleine Protonenergien ( $E_p \approx 6$  MeV) um mehr als einen Faktor 10 zu klein, wohingegen bei Protonenergien in der Nähe der Aufbruchsschwelle ( $E_p \approx 12$  MeV) Experiment und Theorie sehr gut übereinstimmten.

In dieser Arbeit wird untersucht ob die Diskrepanz durch den Mechanismus der Coulombdissoziation erklärt werden kann; es wird natürlich nicht versucht den Deuteronenaufbruch ausschließlich durch Coulombanregung zu beschreiben.

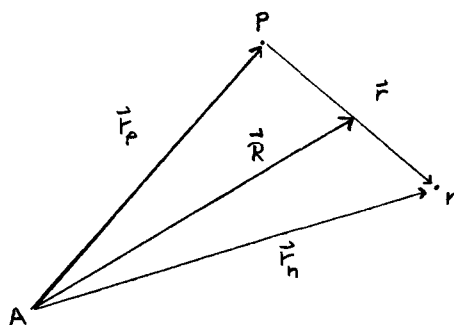
Bei der Durchführung der Arbeit stellte sich dann die Frage, wie sich der Anteil der Coulombdissoziation am Aufbruch ändert, wenn die Energie der Deuteronen erhöht wird und welche Targeteigenschaften die Reaktion beeinflussen.

Das Modell der Coulombdissoziation kann auf die gut ausgearbeiteten Theorien der Coulombanregung (AL56) und der relativistischen Coulombanregung (AL79) zurückgeführt werden. Die Anwendung auf das Deuteron ist nur ein einfaches Anwendungsbeispiel, da dessen Wellenfunktion wohl bekannt ist. Die Verallgemeinerung auf andere Kerne ist leicht möglich, wenn man deren elektromagnetische Eigenschaften, genauer gesagt, deren  $B(E1)$  Werte kennt.



## I.1 DWBA - Ansätze zur Beschreibung des Deuteronaufbruchs

Es soll die Reaktion  $d + A \rightarrow p + n + A$  untersucht werden, wobei A ein schwerer Targetkern mit Kernladungszahl Z sein soll. Wir nehmen an, daß A im Grundzustand bleibt, was man allgemein 'elastischen' Aufbruch nennt, im Unterschied zum 'inelastischen' Aufbruch, bei dem eines der Fragmente, hier Proton und Neutron, nicht elastisch gestreut wird, sondern irgendeine Reaktion mit dem Targetkern eingeht. Wir führen die folgenden Koordinaten ein:



$\vec{R}$  bezeichnet den Schwerpunkt des Deuterons,  $\vec{r}$  ist die Relativkoordinate im p-n System. Der Hamiltonoperator H des Gesamtsystems lautet,

$$H = T + V_{np}(\vec{r}) + V_{nA}(\vec{r}_n) + V_{pA}(\vec{r}_p) \quad \text{I.1}$$

wo T die kinetische Energie beschreibt und  $V_{nA}$ ,  $V_{pA}$  sowie  $V_{np}$  die (optischen) Potentiale zwischen jeweils zwei der drei Teilchen bezeichnen. Die T - Matrix in Post - und Priorform lautet (BA76)

$$T_{fi}^+ = \langle e^{i\vec{k}_p \vec{r}} e^{i\vec{k}_n \vec{r}_n} | V_{nA} + V_{pA} + V_{np} | \Psi_i^+ \rangle \quad \text{I.2a}$$

$$T_{fi}^- = \langle \Psi_f^- | V_{nA} + V_{pA} | e^{i\vec{K}_i \vec{R}} \varphi_d \rangle \quad \text{I.2b}$$

$\varphi_d$  ist die Grundzustandswellenfunktion des Deuterons, definiert durch

$$(T_r + V_{np}) \varphi_d(r) = -\epsilon_d \varphi_d(r) \quad \text{I.3}$$

$\Psi_i^+$ ,  $\Psi_f^-$  sind die vollständigen 3 - Teilchenstreulösungen mit den entsprechenden Randbedingungen. Die Berechnung dieser Wellenfunktionen erfordert die Lösung der Fadeevgleichungen was praktisch nicht durchführbar ist. Stattdessen macht man einen DWBA-Ansatz; d.h. man führt Hilfspotentiale (distorting potentials)  $W_i$  und  $W_f$  im Eingangs-



und Ausgangskanal ein, und approximiert so die 3-Teilchenwellenfunktion durch 'physikalisch sinnvolle' Modellwellenfunktionen. Im Eingangskanal bietet sich an

$$I.4 \quad W_i = V_{dA}(\vec{R})$$

als Hilfspotential einzuführen und so die Bewegung des Deuteronschwerpunktes im Coulombfeld zu beschreiben.  $\Psi_i^+$  wird approximiert durch

$$I.5 \quad \Psi_i^+ \cong \chi_i^+ = \chi_{\vec{R}_i}^+(\vec{R}) \varphi_d(r)$$

Im Ausgangskanal bieten sich zwei verschiedene Hilfspotentiale an.

Zum Einen kann man

$$I.6 \quad W_f = V_{nA} + V_{pA}$$

wählen.

$\Psi_f^-$  wird approximiert durch

$$I.7 \quad \Psi_f^- \cong \chi_f^- = \chi_{\vec{k}_p}^- \chi_{\vec{k}_n}^-$$

Der Endzustand wird durch ein Produkt aus verzerrten Proton- und Neutronwellen beschrieben. Diese Approximation wird auch Free Final State breakup, FFS bu, (BU81) genannt, da eine mögliche Anregung des p-n Systems nicht berücksichtigt wird. Für die Übergangsamplitude erhält man in dieser Näherung:

$$I.8a \quad T_{fi}^+ = \langle \chi_{\vec{k}_p}^- \chi_{\vec{k}_n}^- | V_{np} | \chi_{\vec{R}_i}^+ \varphi_d \rangle$$

$$I.8b \quad T_{fi}^- = \langle \chi_{\vec{k}_p}^- \chi_{\vec{k}_n}^- | V_{nA} + V_{pA} - V_{dA} | \chi_{\vec{R}_i}^+ \varphi_d \rangle$$

Post- und Prioramplitude sind auf der Energieschale gleich (BA76), wegen der kurzen Reichweite von  $V_{np}$  wird meist nur die Postform für praktische Rechnungen verwandt.

Zum Anderen kann man im Ausgangskanal das gleiche Hilfspotential wie im Eingangskanal verwenden; d.h. wie im Eingangskanal wird der Endzustand als Produkt von Schwerpunktbewegung des Deuterons und einer Kontinuums Deuteronwellenfunktion beschrieben.

$$I.9a \quad \Psi_f^- \cong \chi_f^- = \chi_{\vec{R}_f}^- \varphi_{\vec{k}}(r)$$

Den Schwerpunktimпульs  $\vec{K}_f$  und den Relativimpuls  $\vec{k}$  im p - n System erhält man aus den Impulsen von Proton und Neutron im Endzustand

$$I.9b \quad \vec{k} = \frac{1}{2} (\vec{k}_p - \vec{k}_n)$$

$$I.9c \quad \vec{K}_f = \vec{k}_p + \vec{k}_n$$

Approximation (I.9a) führt zu der Übergangsamplitude:

$$T_{fi} = \langle \chi^-_{\vec{k}_f} \varphi_{\vec{k}} | V_{nA} + V_{pA} - V_{dA} | \chi^+_{\vec{k}_i} \varphi_d \rangle \quad \text{I.10}$$

Da jetzt die Hilfspotentiale im Eingangs- und Ausgangskanal gleich sind, stimmen Post- und Priorform identisch überein. Im Unterschied zu (I.8) wird die 'final state interaction'  $V_{np}$  nun explizit berücksichtigt; das Deuteron wird ins Kontinuum angeregt und zerfällt anschliessend. Bei anderen Projektilen als dem Deuteron, z.B. dem Lithium, nennt man diesen Aufbruchsmechanismus sequentiellen Aufbruch.

Das Matrixelement (I.10) wurde von Austern und Rybicki (RY72) für 12 MeV Deuteronen auf Gold untersucht wobei sie keine gute Übereinstimmung mit dem Experiment fanden. Der wichtigste Grund für die Diskrepanz liegt darin, daß in (I.9a) das Coulombfeld auf den Schwerpunkt des Deuterons und nicht ausschließlich auf das Proton wirkt. Gute Übereinstimmung mit Experimenten findet man ausgehend von (I.8a), insbesondere dann, wenn man auch inelastische Prozesse zulässt (PA78).

Im Folgenden wird gezeigt, daß es dennoch Reaktionen gibt, für die der durch (I.10) beschriebene Prozeß dominierend ist.

Die Anregung des Deuterons ins Kontinuum wird hauptsächlich vom Coulombfeld verursacht, d.h. die Anregung findet weit außerhalb des Targetkernes statt. Deshalb ist es eine zulässige Näherung in (I.10) die Kernwechselwirkung zu vernachlässigen. Dann haben wir für die T-matrix:

$$T_{fi} = \langle \chi^-_{\vec{k}_f} \varphi_{\vec{k}} | Ze^2 \left( \frac{1}{r_p} - \frac{1}{R} \right) | \chi^+_{\vec{k}_i} \varphi_d \rangle \quad \text{I.11}$$

Durch Entwickeln nach Multipolen separiert die Übergangsamplitude (I.11) in ein Produkt aus Kernmatrixelement und Radialmatrixelement und entspricht der quantenmechanischen Formel für Coulombanregung in erster Ordnung Störungstheorie (AL56) (BI65).

$$T_{fi} = \sum_{\lambda \mu} \langle \chi^-_{\vec{k}_f} | R^{-\lambda-1} Y_{\lambda \mu}(\hat{R}) | \chi^+_{\vec{k}_i} \rangle M^*(E, \lambda, \mu) \quad \text{I.12a}$$

$$M(E, \lambda, \mu) = \langle \varphi_{\vec{k}} | \left( \frac{r}{2} \right)^\lambda Y_{\lambda \mu}(\hat{r}) | \varphi_d \rangle \quad \text{I.12b}$$

Hierbei wurde  $R > r$  angenommen.

## I.2 Deuteronwellenfunktion und B(E1)-Wert

Weil das Übergangsmatrixelement (I.12) in ein Kernmatrixelement und ein Radialmatrixelement separiert und die Eigenschaften des Projektils nur in das Kernmatrixelement eingehen, kann die Theorie der Coulombdissoziation leicht vom Deuteron auf andere Projektile übertragen werden, sofern man deren elektromagnetische Übergangsmatrixelemente kennt.

Für die Coulombdissoziation des Deuterons ist es ausreichend in der Reihenentwicklung (I.12) den Dipolterm zu berücksichtigen (Siehe Anhang B). Die M(E1) Amplitude lässt sich leicht berechnen, wenn der S Grundzustand durch eine 'zero-range' Wellenfunktion ersetzt wird:

$$I.13a \quad \varphi_d = N_0 \frac{e^{-\alpha r}}{r} = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \frac{e^{-\alpha r}}{r}$$

$$I.13b \quad \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2 \mu_d} = \epsilon_d$$

Die Kontinuumswellenfunktion  $\varphi_k$  im Endzustand kann durch eine ebene Welle angenähert werden, da die p-n Wechselwirkung im P-Zustand nur schwach ist. Die Korrektur für die endliche Reichweite des Potentials kann in guter Näherung (BW79) durch Änderung der Normierungskonstanten  $N_0$  des Grundzustandes berücksichtigt werden; d.h. die M(E1)-Amplitude hängt nicht empfindlich von den Details des p-n Potential ab.

$$I.14 \quad N_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} \longrightarrow N = N_0 \sqrt{\frac{1}{1 - \alpha r_{0t}}}$$

Hierbei ist  $r_{0t}$  die effektive Reichweite im Triplettzustand. ( $r_{0t} = 1.7$  fm) (SI75). Mit den oben gemachten Näherungen ist die Berechnung der M(E1) Amplitude einfach; man entwickelt die ebene Welle des Endzustandes nach Kugelflächenfunktionen und benutzt die Orthogonalitätsrelation. Das verbleibende Integral über  $r$  findet man z.B. in Sneddon (SN72).

$$\begin{aligned} I.15 \quad M(E1, m) &= \langle (2\pi)^{-3/2} e^{i\vec{k}\vec{r}} | \frac{r}{2} Y_{1m}(\hat{r}) | N \frac{e^{-\alpha r}}{r} \rangle \\ &= \frac{N}{2} (2\pi)^{-3/2} i Y_{1m}(\hat{k}) \int_0^\infty dr r^2 j_1(kr) e^{-\alpha r} \\ &= i (2\pi)^{-3/2} N \frac{k}{(k^2 + \alpha^2)^2} Y_{1m}(\hat{k}) \end{aligned}$$



Nach (AL75) ist der B(E1)-Wert definiert als

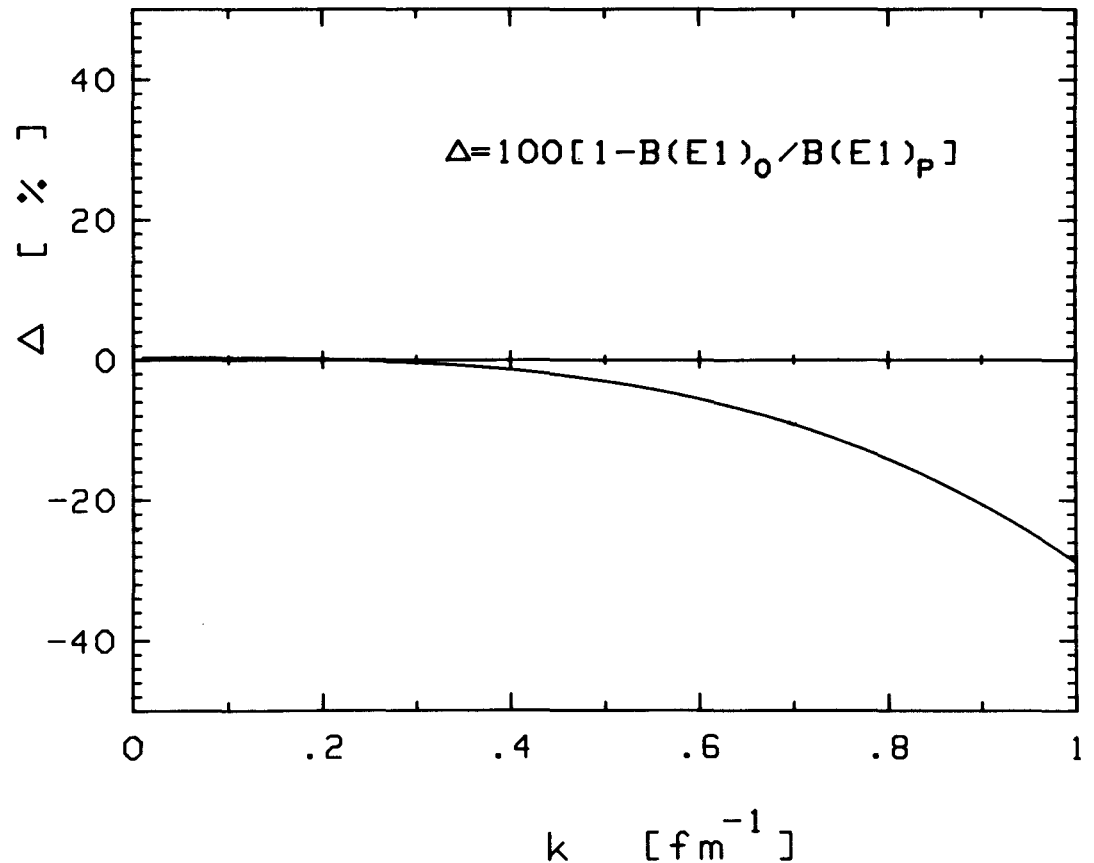
$$B(E1, I_o \rightarrow I_f) = \frac{1}{2I_o + 1} |\langle I_o || M(E1) || I_f \rangle|^2 \quad \text{I.16a}$$

mit dem reduzierten Matrixelement (AL75):

$$\langle I_o m_o | M(E1, m) | I_f m_f \rangle = (-1)^{I_o - m_o} \begin{pmatrix} I_o & 1 & I_f \\ -m_o & m & m_f \end{pmatrix} \langle i || M || f \rangle \quad \text{I.16b}$$

Da der Endzustand im Kontinuum liegt, ist der B(E1)-Wert eine Funktion von k, der Wellenzahl im p-n System.

$$B(E1)(k) = \frac{3\alpha}{\pi^2} \frac{1}{1 - \alpha r_o t} \frac{k^2}{(k^2 + \alpha^2)^4} \quad \text{I.17}$$



FIGUR I.i

-----  
Differenz der B(E1)-Werte,  $B(E1)_0$  aus der zero-range Grundzustandsfunktion und  $B(E1)_p$  aus dem Paris-potential, als Funktion der Wellenzahl k im p-n System.

Um zu zeigen, daß der B(E1)-Wert des Deuterons tatsächlich nicht empfindlich von den Eigenschaften der Wellenfunktion im Grundzustand abhängt, wurde der B(E1)-Wert aus der modifizierten zero-range Wellenfunktion mit demjenigen verglichen, der sich ergibt, wenn der S Zustand durch das Paris-Potential beschrieben wird. Die Kontinuumsfunktion ist in beiden Fällen durch eine ebene Welle approximiert worden.

Die Parametrisierung des Grundzustandes im Paris-Potential ist durch eine Superposition von 13 Yukawa's gegeben (LA81); d.h. die Wellenfunktion ist analytischen Rechnungen zugänglich.

$$\text{I.18a} \quad \phi^P = \sum_j C_j \frac{e^{-m_j r}}{r}$$

$$\text{I.18b} \quad B(E1)^P = \frac{3}{2\pi^2} \left( \sum_j C_j \frac{k}{(k^2 + m_j^2)^2} \right)^2$$

Um die beiden B(E1)-Werte zu unterscheiden, wird der B(E1)-Wert aus dem Paris-Potential mit einem Index 'P' und der B(E1)-Wert aus der modifizierten zero-range Funktion mit einem Index '0' notiert. In Fig(I.i) ist die Differenz der beiden B(E1)-Werte in Prozent gegen die Wellenzahl k aufgetragen. Erst für  $k > .5 \text{ fm}^{-1}$  ist  $B(E1)_0$  deutlich grösser als  $B(E1)_P$ . Der Grund für das unterschiedliche Verhalten bei großen k liegt darin, daß die zero-range Wellenfunktion für kleine r nicht gegen Null geht. Für die Coulombdissoziation ist der Bereich bis etwa  $0.5 \text{ fm}^{-1}$  wichtig, was einer Anregungsenergie des Deuterons von maximal 10 MeV entspricht.

## I.3 Grundlagen der semiklass. Theorie der Coulombanregung

Dieser Abschnitt soll in erster Linie die Notation und die Definitionen einführen, die zum Verständnis der Coulombanregung wichtig sind. Die vollständige Theorie findet man in den klassischen Arbeiten von Alder und Winther (AL56) (AL75).

Coulombanregung wird durch die langreichweitige elektromagnetische Wechselwirkung verursacht und ist damit bei Kernreaktionen schon dann wirksam, wenn Targetkern und Projektil noch soweit voneinander entfernt sind, daß ihre Massenverteilungen nicht überlappen. Reine Coulombanregung liegt insbesondere dann vor, wenn die Coulombbarriere so hoch liegt, daß das Projektil nicht ins Target eindringen kann. Ein Maß hierfür ist der sogenannte Coulombparameter  $\eta$ .

$$\eta = \frac{a}{\lambda} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \quad \text{I.19}$$

$Z_1$  und  $Z_2$  sind die Kernladungszahlen von Projektil respektive Target,  $2a$  gibt den minimalen Abstand von Target und Projektil bei einer 'head-on-collision' an und  $\lambda$  ist die reduzierte de Broglie Wellenlänge des Projektils. Die Mindestvoraussetzung für eine gute Beschreibung einer Kernreaktion durch Coulombanregung ist, daß  $\eta$  groß gegen 1 ist, d.h. anschaulich ist dann der Abstand der beiden Teilchen während der Reaktion grösser als die Wellenlänge des Projektils.

Die semiklassische Theorie der Coulombanregung beschreibt nun die Relativbewegung von Target und Projektil klassisch, d.h. das Projektil bewegt sich längs einer klassischen Bahn und erzeugt am Ort des Targets ein mit der Zeit variierendes elektromagnetisches Feld. Die Wahrscheinlichkeit  $P_{i \rightarrow f}$  das Target aufgrund dieses zeitabhängigen Feldes aus dem Zustand  $i$  in den Zustand  $f$  anzuregen wird quantenmechanisch, z.B. in Störungstheorie, berechnet. Der Wirkungsquerschnitt faktorisiert dann:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}_{i \rightarrow f} = P_{i \rightarrow f} \frac{d\sigma}{d\Omega} \text{Ruth.} \quad \text{I.20}$$

Diese Gleichung ist allerdings nur dann richtig, wenn man die Änderung der klassischen Bahn aufgrund des Energieverlustes bei der Anregung vernachlässigen kann. In praktischen Rechnungen symmetrisiert man deshalb die Formeln für Coulombanregung und ersetzt zum Beispiel die Relativgeschwindigkeit  $v$  zwischen Target und Projektil durch das geometrische Mittel der Geschwindigkeiten in Anfangs- und Endzustand. Die Anregungswahrscheinlichkeit ist definiert durch:

$$P_{i \rightarrow f} = \frac{1}{2I_i + 1} \sum_{m_i} |\langle f I_f m_f | b | i I_i m_i \rangle|^2 \quad \text{I.21}$$



Hierbei sind  $I_i, M_i$  und  $I_f, M_f$  die Spins von Anfangs- und Endzustand des Targetkerns. In einer Theorie erster Ordnung gilt:

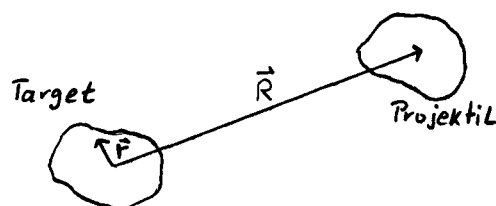
$$I.22 \quad \langle f | I_f m_f | b | i | I_i m_i \rangle = \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f | V(t) | i \rangle e^{i\omega_{if}t}$$

$V(t)$  beschreibt das Wechselwirkungspotential zwischen Target und Projektil,

$$I.23 \quad \omega_{if} = (E_f - E_i) / \hbar$$

$$I.24 \quad V(t) = Z_1 e \left\{ \frac{1}{|\vec{r} - \vec{R}(t)|} - \frac{1}{|\vec{R}(t)|} \right\}$$

wobei  $\vec{R}$  der Vektor ist, der den Schwerpunkt des Target mit dem des Projektils verbindet und  $\vec{r}$  die Koordinate im Schwerpunktssystem des Targets ist.



Ganz analog zu (I.12) faktorisiert die Anregungsamplitude in ein Kernmatrizelement und ein Radialintegral. Der Unterschied zum quantenmechanischen Ansatz (I.12) liegt darin, daß nun die Radialintegrale längs einer klassischen Coulombtrajektorie ausgewertet werden.

$$I.25a \quad V(t) = 4\pi Z_1 e \sum_{\lambda} \sum_{\mu} \frac{1}{2\lambda+1} \frac{r^{\lambda}}{R^{\lambda+1}} Y_{\lambda\mu}(\hat{R}) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r})$$

$$I.25b \quad \langle f | b | i \rangle = \frac{4\pi Z_1 e}{i\hbar} \sum_{\lambda, \mu} \frac{1}{2\lambda+1} M(E\lambda, \mu) S_{E\lambda}$$

$$I.25c \quad S_{E\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega_{if}t} Y_{\lambda\mu}(\hat{R}(t)) R(t)^{-(\lambda+1)}$$

Die Bahnintegrale  $\int_{E\lambda}$  sind von Alder und Winther (AL56) analytisch berechnet worden. Als Endergebnis erhält man für den Wirkungsquerschnitt:

$$d\sigma = \left[ \frac{Z_1 e}{\hbar v} \right]^2 a^{-\lambda+2} B(E\lambda, I_i \rightarrow I_f) dfE_\lambda(\Theta, \xi) \quad \text{I.26a}$$

$$a = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{M_0 v^2} \quad \text{I.26b}$$

$v$  ist die Relativgeschwindigkeit von Target und Projektil,  $M_0$  die reduzierte Masse des Systems. In die  $dfE_\lambda$  Funktion gehen die Bahnintegrale  $\int_{E_1}$  ein. Der Parameter  $\xi$  beschreibt das Verhältnis von Stoßfrequenz zur 'Kernfrequenz' und gibt an wie adiabatisch die Reaktion verläuft.

$$\xi = \frac{\Delta E}{2E} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v} \quad \text{I.27a}$$

$$E = \frac{M_0}{2} v^2 \quad \text{I.27b}$$

#### I.4 Abschätzen der Größenordnung des Effekts der Coulombdissoziation für 15 MeV Deuteronen auf Thorium

Mit Hilfe der semiklassischen Theorie der Coulombanregung können wir leicht prüfen, ob die Coulombdissoziation bei der Reaktion  $\text{Th}(d, d^*)$  überhaupt eine Rolle spielt und für welche Winkel der Effekt besonders groß ist. Nach (I.26a) und (I.17) haben wir:

$$\text{I.28a} \quad d\sigma_{E1} = \left[ \frac{Z_1 e^2}{\hbar} \right] \int_0^\infty dk \frac{1}{v_i v_f} \frac{3 \alpha k^4}{\pi^2 (1 - \alpha r_{ot}) (k^2 + \alpha^2)^2} * \\ * df_{E1}(\Theta, \xi)$$

Wie oben schon erwähnt, wurde in (I.28a) die symmetrisierte Form von (I.26a) verwandt. Man beachte, daß in (I.28a) die  $df_{E1}$  Funktion nicht vor das Integral gezogen werden darf, da der Adiabazitätsparameter  $\xi$  von der Anregungsenergie abhängt.

Nach (AL75) kann die  $df_{E1}$  Funktion durch modifizierte Besselfunktionen ausgedrückt werden.

$$\text{I.29a} \quad df_{E1} = \frac{4}{9} \pi \xi^2 e^4 e^{-\pi \xi} \left[ |K_{1/2}(\epsilon \xi)|^2 + \frac{\epsilon^2 - 1}{\epsilon^2} |K_{3/2}(\epsilon \xi)|^2 \right] d\Omega$$

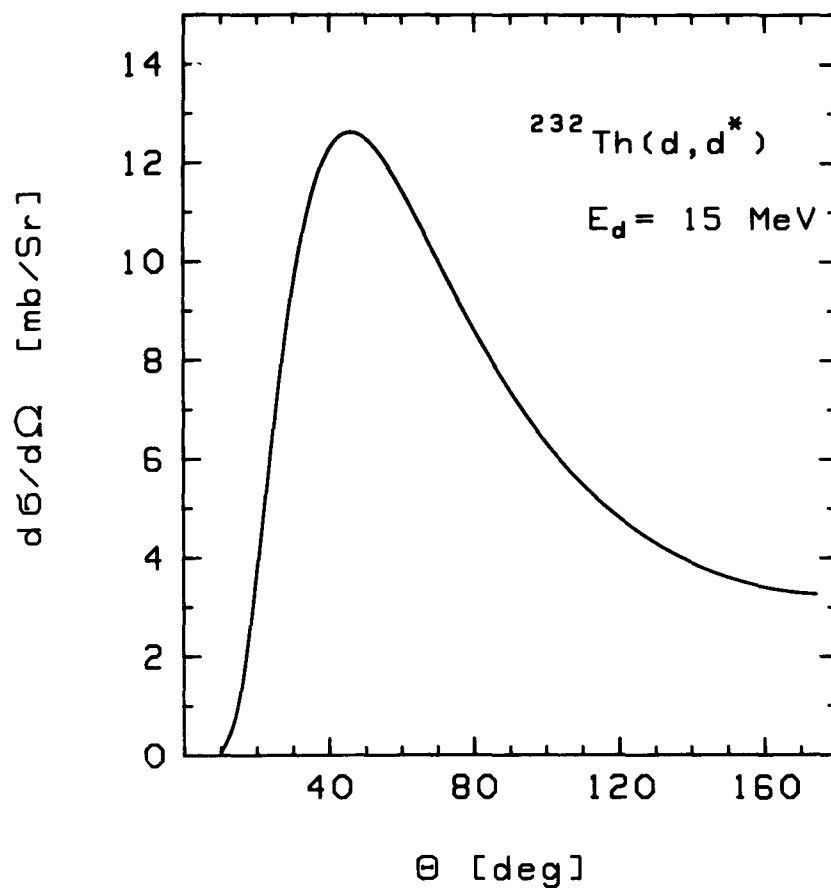
$$\text{I.29b} \quad \epsilon = \frac{1}{\sin(\Theta/2)}$$

Die modifizierten Besselfunktionen sind definiert als (SN72):

$$\text{I.29c} \quad K_{1/2}(z) = \int_0^\infty e^{-z \cosh(u)} \cos(\xi u) du$$

Figur (I.ii) zeigt das Ergebnis. Der Wirkungsquerschnitt hat ein Maximum von 12 mb bei etwa 45 Grad. Die Coulombdissoziation kann also für Vorwärtswinkel wichtig sein.





FIGUR I.ii

-----  
Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $^{232}\text{Th}(d, d^*)$  mit  $E_d = 15 \text{ MeV}$ , gerechnet in semiklassischer Näherung.

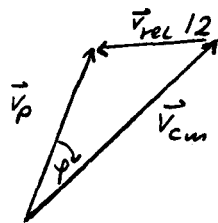
### Einfache Berechnung des inklusiven Protonenspektrums für 15 MeV Deuteronen auf Thorium

Um die Theorie mit dem experimentell gemessenen inklusiven Protonenspektrum vergleichen zu können, muß der dreifach differentielle Wirkungsquerschnitt  $d^3\sigma/d\Omega_p/d\Omega_n/dE_p$  berechnet und über das unbeobachtete Neutron integriert werden. (Siehe Anhang A). Einen groben Überblick über die zu erwartende Größenordnung kann man sich verschaffen, wenn man die Beschreibung des Aufbruch des Deuterons durch die Annahme vereinfacht, daß die Anregung in den Zustand  $k$  isotrop erfolgt, d.h. unabhängig vom Winkel zwischen  $V_{cm}$  und  $V_{rel}$  ist.

Bei der Berechnung des Wirkungsquerschnittes für Coulombdissoziation stellt man fest, daß der Hauptbeitrag zum Wirkungsquerschnitt von Anregungen in einen Endzustand mit  $k \approx .15$  fm stammt (Figur II.iv). Die Relativgeschwindigkeit zwischen Proton und Neutron ist dann:

$$I.30a \quad v_{rel} = \frac{\hbar k}{m} = .03c$$

$$I.30b \quad v_{cm} = \sqrt{\frac{2E}{m}} = .2c$$



Der halbe Öffnungswinkel, unter dem Proton und Neutron auseinanderfliegen, kann so abgeschätzt werden zu:

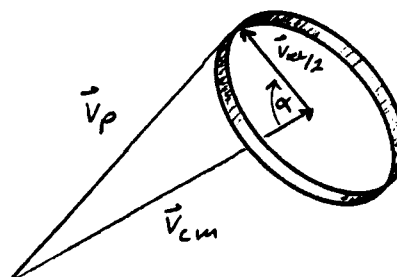
$$I.31 \quad \tan(\varphi) = \frac{v_{rel}/2}{v_{cm}} \approx .08 \Rightarrow \varphi = 4^\circ$$

Der Öffnungswinkel des Kegels, auf dem Proton- und Neutron-Geschwindigkeitsvektoren nach dem Aufbruch liegen ist also relativ klein. Da die Wahrscheinlichkeit für Coulombdissoziation keine sehr schnell mit dem Streuwinkel des Schwerpunktes  $\theta_{cm}$  veränderliche Funktion ist, kann man näherungsweise so tun, als ob das Proton in die gleiche Richtung wie der Schwerpunkt des Deuterons gestreut wird. Dann kann der doppelt differentielle Wirkungsquerschnitt  $d^2\sigma/d\Omega_p/dE_p$  geschrieben werden als:

$$I.32 \quad \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_{rel}} \frac{dW(E_p, E_{rel})}{dE_p} dE_{rel}$$

Der erste Faktor unter dem Integral beschreibt die Wahrscheinlichkeit für Streuung des Deuterons in das Raumwinkелеlement  $\Omega$  bei gleichzeitiger Anregung in einen Zustand

mit der Energie  $E_{rel}$ . Damit ist auch der Betrag der Relativgeschwindigkeit  $V_{rel}$  im p-n System festgelegt. Der zweite Faktor gibt an mit welcher Wahrscheinlichkeit es möglich ist, unter Beachtung des Energiesatzes ein Proton mit der Energie  $E_p$  auszustatten oder äquivalent, dem Proton die Geschwindigkeit  $V_p$  zu geben. Eine Skizze soll dies verdeutlichen:



$$dW(E_p) = \frac{2 \pi \sin(\alpha) d\alpha}{4 \pi} \quad I.32$$

Die Wahrscheinlichkeit  $W(E_p)$  ist der Fläche des Rings proportional. Weiter gilt:

$$\vec{v}_p = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{rel}/2 \quad I.33a$$

$$E_p = \frac{m}{2} (v_{cm}^2 + \frac{v_{rel}^2}{4} + v_{rel} v_{cm} \cos(\alpha)) \quad I.33b$$

$$\Rightarrow dE_p = \frac{m}{2} v_{rel} v_{cm} \sin(\alpha) d\alpha \quad I.33c$$

Also hat man für festes  $V_{rel}$ , unabhängig vom Winkel zwischen  $V_{cm}$  und  $V_p$ :

$$\frac{dW(E_p)}{dE_p} = \frac{2 \pi \sin(\alpha) d\alpha}{4 \pi m/2 v_{rel} v_{cm} \sin(\alpha) d\alpha} = \frac{1}{m v_{rel} v_{cm}} \quad I.34$$

Zusammen ergibt sich dann:

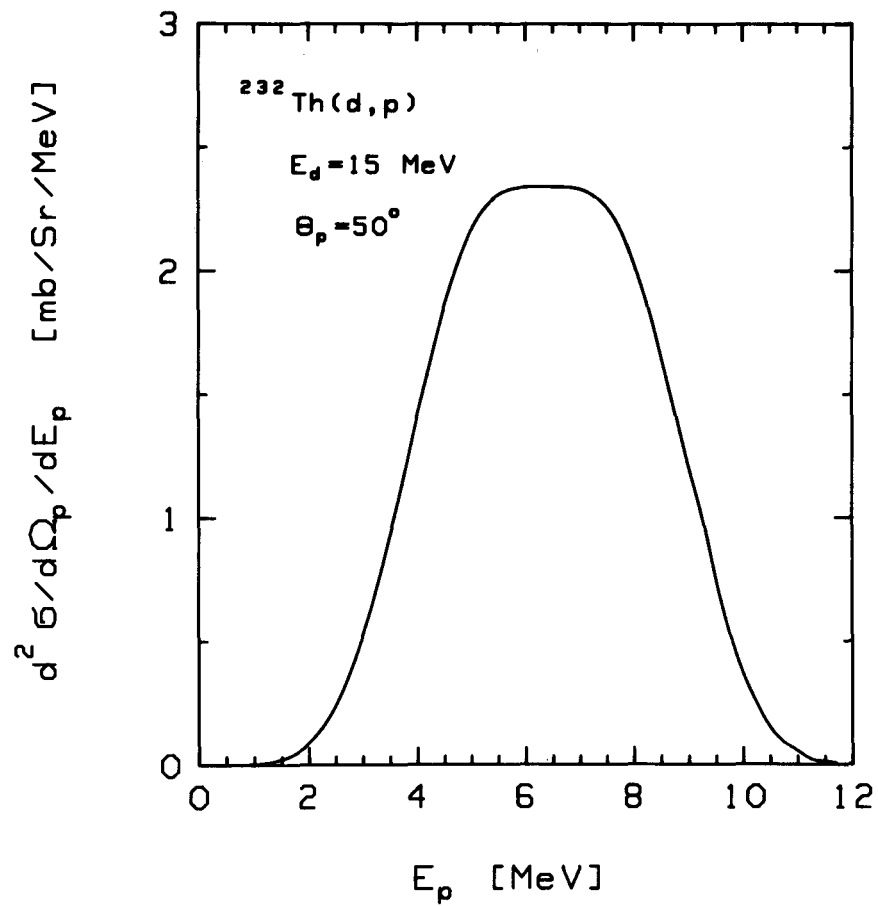
$$\frac{d^2 \sigma}{d\Omega_p dE_p} = \int \frac{d^2 \sigma}{d\Omega dE_{rel}} \frac{1}{m v_{rel} v_{cm}} dE_{rel} \quad I.35$$

Es wird über alle  $E_{rel}$  integriert, die der Bedingung genügen, daß  $V_{rel}/2$  und  $V_{cm}$  zu  $V_p$  addiert werden können.



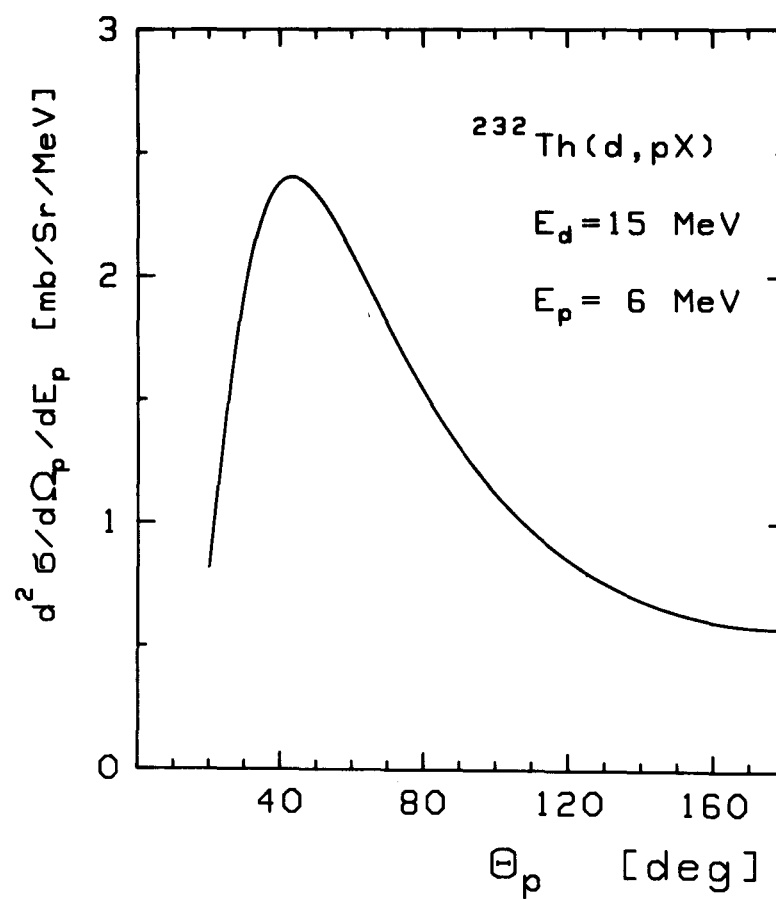
$$\frac{m}{2} \left( v_{cm} - \frac{v_{rel}}{2} \right)^2 \leq E_p \leq \frac{m}{2} \left( v_{cm} + \frac{v_{rel}}{2} \right)^2 \quad \text{I.36}$$

Diese grob vereinfachte Beschreibung des Aufbruchs ohne zweidimensionale Winkelintegration, erlaubte die numerische Berechnung der Winkelverteilungen und Spektren auf einem Taschenrechner. Beim Vergleich mit anderen Rechnungen (Sommerfeld, Partialwellenzerlegung) muß beachtet werden, daß die Abweichungen nicht auf die Verwendung der semiklassischen  $dfE1$  Funktion zurückzuführen sind, sondern in erster Linie auf die Annahme, daß die Anregung des Deuterons in den Zustand  $\bar{k}$  isotrop ist und daß das Proton in die gleiche Richtung wie der Schwerpunkt des Deuterons abgelenkt wird.



FIGUR I.iii

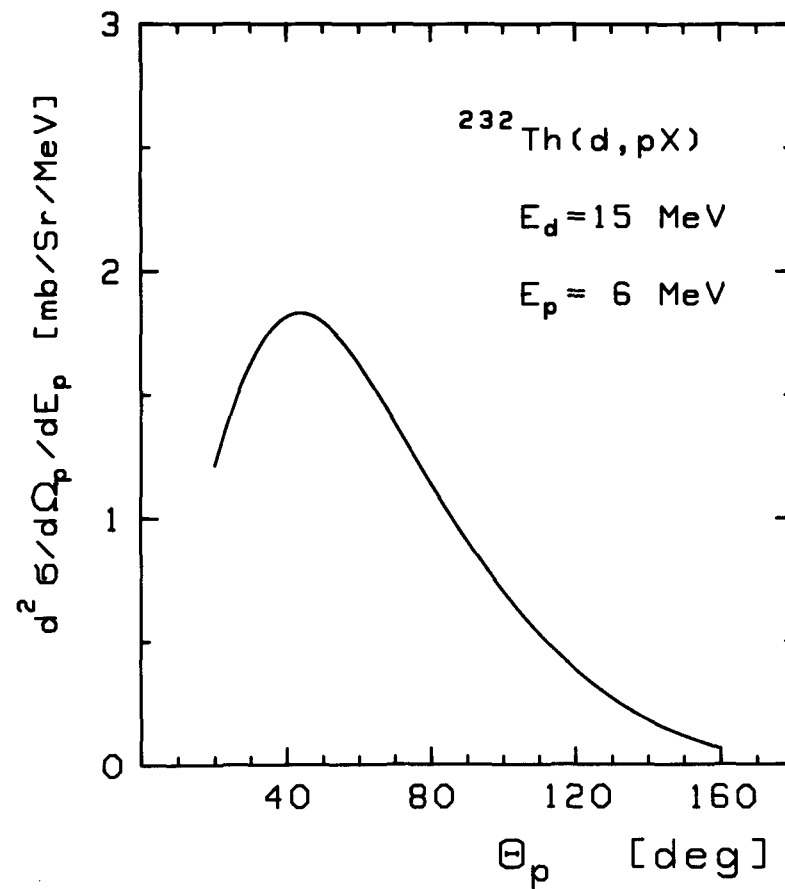
-----  
 Semiklassisch unter der Annahme  $\theta_p = \theta_{cm}$   
 gerechnetes Protonenspektrum für  
 $^{232}\text{Th}(d,p); E_d = 15 \text{ MeV}$ .



FIGUR I.iv

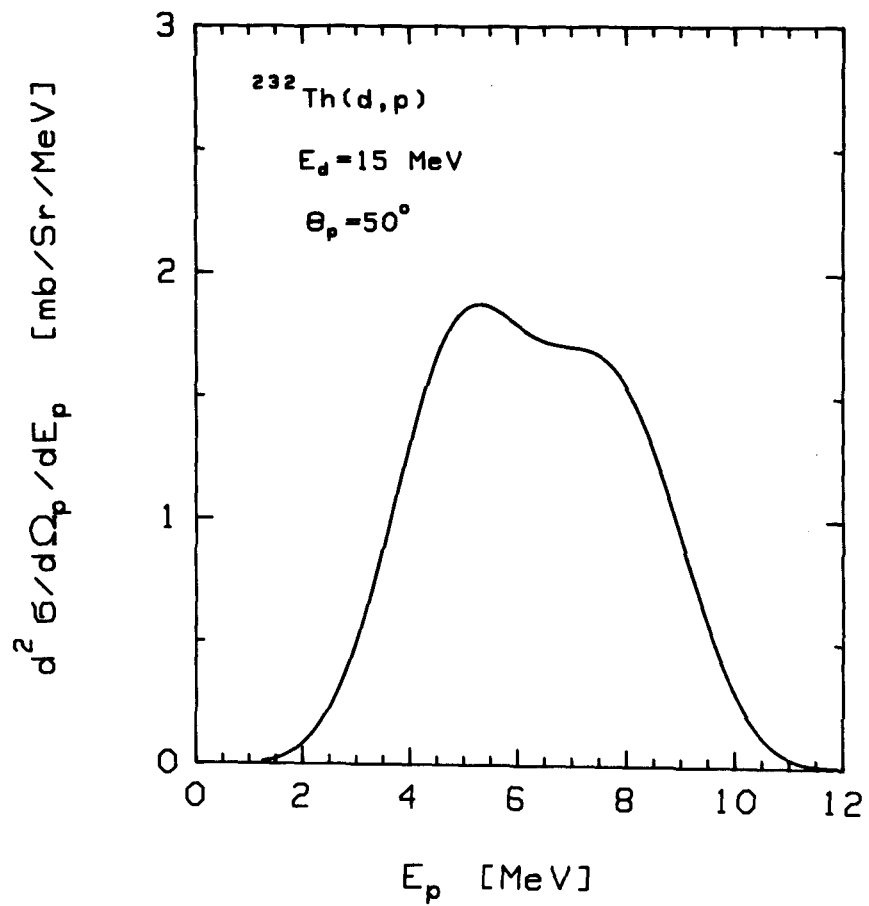
-----

Semiklassisch unter der Annahme  $\Theta_p = \Theta_{cm}$   
 gerechnete Winkelverteilung für  $^{232}\text{Th}(d, p)$ ;  
 $E_d = 15 \text{ MeV}$



FIGUR I.v  
-----

Protonwinkelverteilung gerechnet mit der Sommerfeldmethode (vergleiche mit Figur I.iv)



FIGUR I.vi

-----  
 Protonenspektrum gerechnet mit der Sommerfeld-  
 methode (vergleiche mit Figur I.iii)



## I.5 Sommerfeld Methode

Für eine quantenmechanische Berechnung des Wirkungsquerschnittes (in erster Ordnung Störungstheorie) geht man aus von (I.11):

$$T = \langle X^-_{\vec{R}_f} \phi_{\vec{k}} | V_{p o 1} | X^+_{\vec{R}_1} \phi_d \rangle \quad \text{I.37a}$$

$$V_{p o 1} = Z_1 Z_2 e^2 \left[ \frac{1}{|\vec{R} + \vec{r}/2|} - \frac{1}{R} \right] \cong Z_1 Z_2 e^2 \frac{\vec{r} \cdot \vec{R}}{2R^3} \quad \text{I.37b}$$

Das 'Polarisierungspotential' wurde hierbei durch seinen Dipolterm approximiert.

$$T = \langle \phi_{\vec{k}}^* | \frac{\vec{r}}{2} | \phi_d \rangle \langle X^-_{\vec{R}_f} | Z_1 Z_2 e^2 \frac{\vec{R}}{R^3} | X^+_{\vec{R}_1} \rangle \quad \text{I.38}$$

Das  $M(E1)$ -Matrixelement ist uns schon bekannt; das Radialmatrixelement kann man durch Umformung auf das Matrixelement des Impulsoperators  $\vec{p}$  bzw auf das Matrixelement von  $\vec{r}$  zurückführen.

$$\langle X^-_{\vec{R}_f} | Z_1 Z_2 e^2 \frac{\vec{R}}{R^3} | X^+_{\vec{R}_1} \rangle = - \langle X^-_{\vec{R}_f} | \vec{\nabla} V | X^+_{\vec{R}_1} \rangle =: \langle f | \vec{\nabla} V | i \rangle \quad \text{I.39a}$$

Dazu betrachtet man den Doppelkommutator

$$[H, [H, \vec{r}]] = [H, [\frac{p^2}{2M}, \vec{r}]] = \frac{\hbar}{iM} [H, \vec{p}] = \frac{\hbar^2}{M} \vec{\nabla} V \quad \text{I.39b}$$

oder

$$\vec{\nabla} V = \frac{1}{i\hbar} [H, \vec{p}] \quad \text{I.39c}$$

woraus durch einsetzen in (I.39a) folgt:

$$\langle f | \vec{\nabla} V | i \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle f | H \vec{p} - \vec{p} H | i \rangle = \frac{E_f - E_i}{i\hbar} \langle f | \vec{p} | i \rangle \quad \text{I.40}$$

Zu dem Matrixelement von  $\vec{r}$  kommt man folgendermaßen:

$$\text{I.41a} \quad \langle f | [H, \vec{r}] | i \rangle = (E_f - E_i) \langle f | \vec{r} | i \rangle$$

$$\text{I.41b} \quad \langle f | [H, [H, \vec{r}]] | i \rangle = (E_f - E_i)^2 \langle f | \vec{r} | i \rangle$$

mit (I.39b) und (I.40) folgt sofort:

$$\text{I.42} \quad \langle f | \vec{r} | i \rangle = \frac{\hbar}{iM} \frac{1}{(E_f - E_i)^2} \langle f | \vec{p} | i \rangle$$

Dieses Matrixelement von  $\vec{r}$  wurde zuerst von A. Sommerfeld (S060) im Zusammenhang mit Bremsstrahlung von Elektronen ausgerechnet. In der vorliegenden Arbeit werden deshalb Rechnungen, die I.42 bzw I.43 benutzen, kurz "Sommerfeldmethode" genannt.

Es wird im Folgenden das Matrixelement von  $\vec{p}$  benutzt und zwar in einer Form, die von Landau und Lifschitz angegeben wurde (LA71):

$$\langle f | \vec{p} | i \rangle = A_i A_f \frac{8\pi i e^{-\pi \eta_i}}{(p-p')^3 (p+p')} \left[ \frac{p+p'}{p-p'} \right]^{-1(\eta_i + \eta_f)} *$$

$$\text{I.43} \quad * (1-z)^{-1(\eta_i + \eta_f) - 1} [i \eta_i p \vec{q} F(z) + (1-z) F(z) (\vec{p}' - p \vec{p}')] ]$$

wobei  $F$  die hypergeometrische Funktion bedeutet:

$$\text{I.44a} \quad F(z) = F(i \eta_f, i \eta_i; 1; z)$$

$$z = - \frac{2\vec{p}\vec{p}' - \vec{p}\vec{p}'}{(\vec{p} - \vec{p}')^2} \quad \text{I.44b}$$

$$\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}' \quad \text{I.44c}$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{K}_i ; \quad \vec{p}' = \hbar \vec{K}_f \quad \text{I.44d}$$

$$\eta_i = - \frac{Z_1 Z_2 e^2 M}{\hbar p} \quad \text{I.44e}$$

$$\eta_f = - \frac{Z_1 Z_2 e^2 M}{\hbar p'} \quad \text{I.44f}$$

Die  $A_i$ ,  $A_f$  sind Normierungskonstanten von den ein- und auslaufenden Coulombwellenfunktionen.

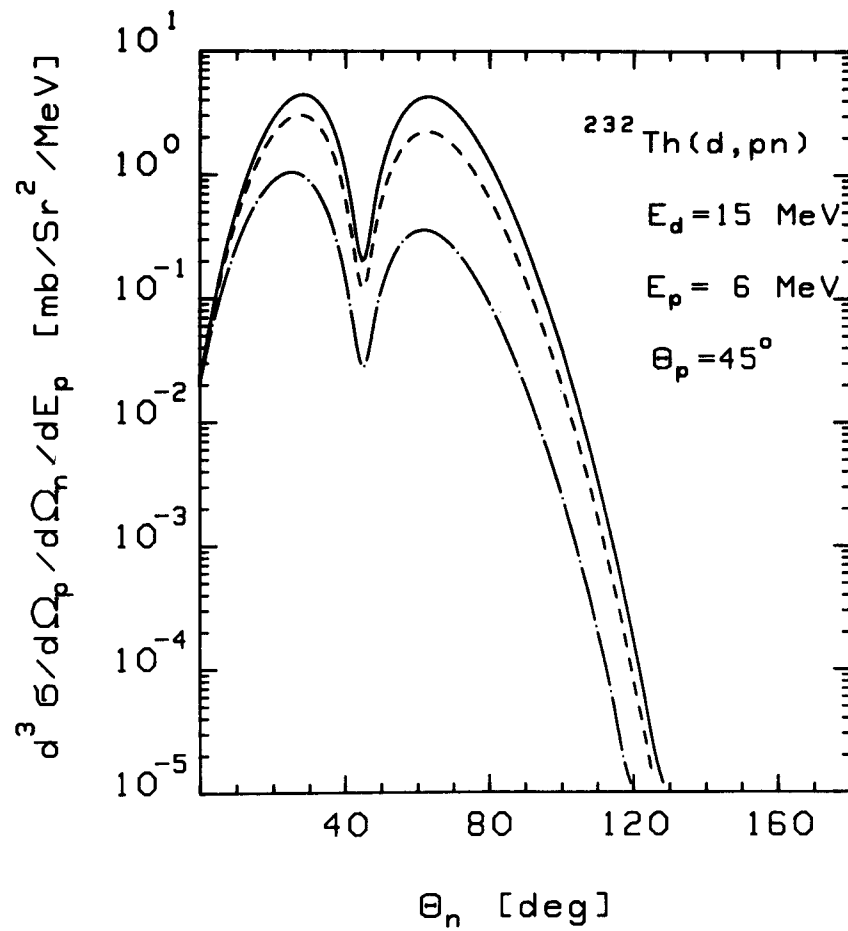
$$A_i = e^{-\pi/2 \eta_i} \Gamma(1+i \eta_i) , \quad A_f = e^{-\pi/2 \eta_f} \Gamma(1-i \eta_f) \quad \text{I.44g}$$

Im Unterschied zum von Sommerfeld bzw Landau und Lifschitz behandelten Problem der Bremsstrahlung von Elektronen, tragen die Deuteronen die Ladung +1; was dazu führt, daß bei den Coulombparametern in (I.43e) und (I.44f) ein negatives Vorzeichen auftritt.

Die Sommerfeldmethode bietet gegenüber der im nächsten Abschnitt behandelten Partialwellenzerlegung den Vorteil, sehr schnell zu rechnen zu sein und keine Konvergenzprobleme aufzuweisen. Außerdem wurde in dieser Arbeit die Sommerfeldmethode dazu benutzt, die Rechnungen mit der Partialwellenzerlegung zu kontrollieren, so daß die Fehlerwahrscheinlichkeit in beiden Programmen drastisch reduziert werden konnte.

Als Beispiel für die Rechnungen mit dem Sommerfeldmodell sind in der Figur I.vii einige 3-fach differentielle Wirkungsquerschnitte aufgetragen. Für feste Protonenergie  $E_p$  und festen Protonstreuwinkel ist die Neutronenwinkelverteilung für die Azimuthalwinkel 0, 20 und 40 Grad gezeigt.

Der Einschnitt bei 45 Grad hat kinematische Ursachen. Eine Protonenergie von 6 MeV bedeutet nämlich, daß Proton und Neutron nach dem Aufbruch ungefähr die gleiche Energie haben (genau gilt dies für  $E_p \approx (E_d - \epsilon_d)/2 \approx 6.39$  MeV). Also sind auch die Beträge der Proton- und Neutronengeschwindigkeit gleich. Werden beide Teilchen nun in die gleiche Richtung emittiert, so ist die Differenzgeschwindigkeit sehr klein; damit ist auch die Wellenzahl  $k$  im p-n System sehr klein und der  $B(E1)$ -Wert wird minimal. Wie man sieht, nimmt der Wirkungsquerschnitt schnell ab, wenn das Neutron die Streuebene unter großem Winkel verläßt.



FIGUR I.vii

3-fach differentieller Wirkungsquerschnitt,  
gerechnet nach der Sommerfeldmethode.

$E_d = 15 \text{ MeV}; E_p = 6 \text{ MeV}; \Theta_p = 45^\circ$

—  $\varphi = 0^\circ$   
 - - -  $\varphi = 20^\circ$   
 — . — . —  $\varphi = 40^\circ$



## I.6 Partialwellenzerlegung

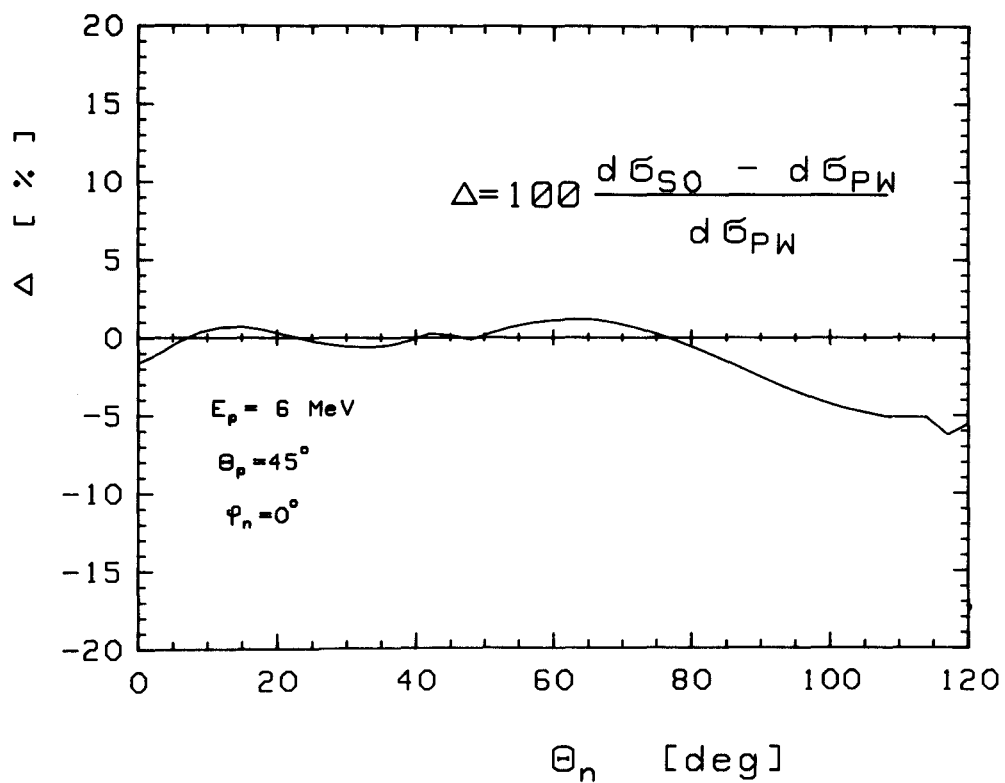
Das Radialmatrixelement (I.39a) kann auch berechnet werden, indem sowohl das Polarisierungspotential als auch die Coulombwellenfunktionen nach Kugelflächenfunktionen entwickelt werden. Diese Methode hat gegenüber der von Sommerfeld den Vorteil, nicht nur für den Dipolterm, sondern für alle Multipole anwendbar zu sein. Außerdem kann man die Partialwellenzerlegung so verallgemeinern, daß auch Kernkräfte berücksichtigt werden können.

Ohne an dieser Stelle alle Rechnungen zu zeigen, sei das Endergebnis für Dipolanregung angegeben. (Einzelheiten: siehe Anhang B)

$$\begin{aligned}
 T = & \frac{4\pi}{3} (-i) \sqrt{\frac{8\pi\alpha}{1-r_{ot}\alpha}} \frac{k}{(k^2 + \alpha^2)^2} * \\
 & * \sum_{l_f} (4\pi)^{3/2} i^{l_f-1} e^{i(\sigma_i + \sigma_f)} \sqrt{(2l_f+1)} \frac{3}{4\pi} \\
 & * \begin{pmatrix} l_i & l_f & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{l_i, l_f}^{-2} (2l_i+1) * \\
 \text{I.45} & * \left\{ 2\text{Re}[Y_{l_i, l_i}(\hat{k}) Y_{l_f, l_f}(\hat{k}_f)] \begin{pmatrix} l_i & l_f & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} + \right. \\
 & \left. + Y_{l_i, 0}(\hat{k}) Y_{l_f, 0}(\hat{k}_f) \begin{pmatrix} l_i & l_f & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}
 \end{aligned}$$

Die  $\sigma_i, \sigma_f$  sind die Coulombphasen, die  $M_{l_i, l_f}^{-2}$  sind die sogenannten Coulombmatrixelemente, hier für  $\lambda=1$ . Für Einzelheiten der Berechnung der  $M_{l_i, l_f}$  sei nochmals auf Anhang B verwiesen, doch sei hier festgestellt, daß die in (AL56) angegebenen Rekursionsformeln eine schnelle und numerisch stabile Berechnung der Coulombmatrixelemente erlauben.

Einen Eindruck von der relativen Genauigkeit der Partialwellenmethode vermittelt Figur I.viii, in der bei einem willkürlich herausgegriffenen, dreifach differentiellen Wirkungsquerschnitt die Abweichungen gegenüber der Sommerfeldmethode in Prozent aufgetragen sind. In der Rechnung wurden 100 Partialwellen summiert. Die stärkeren Abweichungen bei Winkeln größer als 100 Grad sind möglicherweise auf eine zu kleine Zahl von Partialwellen zurückzuführen. Ansonsten ist die Übereinstimmung befriedigend, insbesondere wenn man bedenkt, daß sich die absolute Größe über 5 Zehnerpotenzen erstreckt. Bei den über die Neutronwinkel integrierten Wirkungsquerschnitten mittelt sich ein Teil der Abweichungen heraus, und die Differenzen zwischen den Ergebnissen der beiden Methoden werden praktisch zu Null.



FIGUR I.viii

-----  
 Differenz der 2-fach differentiellen Wirkungsquerschnitte, gerechnet zum Einen nach der Sommerfeldmethode  $\sigma_{SO}$  und zum Anderen mit der Partialwellenzerlegung  $\sigma_{PW}$ , wobei über 100 Partialwellen summiert wurde.

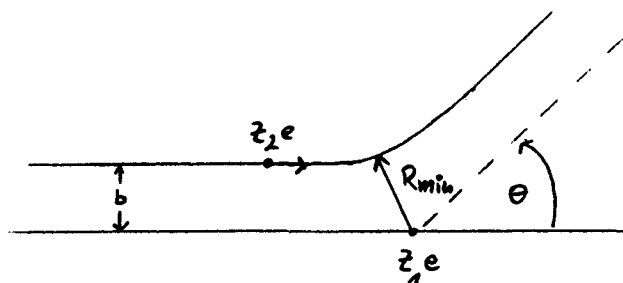
### I.7 Strong Absorption Model

Wenn das Modell der Coulombdissoziation auch auf Projektile angewandt wird, deren Einfallsenegie größer ist als die Coulombbarriere, so wird explizit die oben gemachte Annahme, daß nur die Coulombwechselwirkung wichtig sei, verletzt.

Es soll in diesem Abschnitt die Wirkung der Kernkraft nicht im Detail betrachtet werden; es wird vielmehr durch ein einfaches Modell berücksichtigt, daß für Projektile, die mit dem Target über die Kernkraft wechselwirken, keine Coulombanregung mit anschließender Dissoziation mehr möglich ist. In einem klassischen Bild heißt das, daß alle Projektile, deren Bahnen dazu führen, daß sich die Massenverteilungen von Target und Projektil überlappen, nicht zum Wirkungsquerschnitt für Coulombdissoziation beitragen können. Das Strong Absorption Model (SAM), das ursprünglich von Frahn und Venter (FR64) zur Beschreibung von elastischer Streuung entwickelt wurde, hat die gewünschten Eigenschaften.

Die wichtigste Größe im SAM ist der sogenannte "Cut-Off" Parameter  $R_{cut}$ , welcher der Entfernung entspricht, bei der sich Target und Projektil klassisch berühren.

Folgende Skizze soll die Nomenklatur verdeutlichen:



Aus der klassischen Theorie der Coulombstreuung kennt man die Beziehungen zwischen Streuwinkel und Stoßparameter:

$$I.46 \quad \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\alpha}{2Eb}$$

mit  $\alpha = Z_1 Z_2 e^2$  und dem Stoßparameter  $b$  (NÖ80). Der Minimalabstand  $R_{min}$  zwischen Target und Projektil ist dann (LA75):

$$I.47 \quad R_{min} = a(e+1)$$

mit  $a = \frac{\alpha}{2E}$  und der Exzentrizität  $e$ :

$$e = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}} \quad \text{I.48}$$

Hier ist  $l$  der Drehimpuls und  $m$  die reduzierte Masse des Systems. Damit ergibt sich:

$$R_{min} = \frac{\alpha}{2E} \left( 1 + \frac{1}{\sin(\theta_g/2)} \right) \quad \text{I.49}$$

Für alle Streuwinkel, die größer sind als der 'grazing angle' führen die klassischen Bahnen zu Abständen zwischen Target und Projektil, welche kleiner sind als der Minimalabstand  $R_{min}$ . Für die Rechnung mit der Partialwellenzerlegung wird anstelle des 'grazing angle' der 'grazing' Drehimpuls  $l_g$  benutzt. Dieser kann durch die Beziehung

$$b = \frac{l}{\sqrt{2mE}} \quad \text{I.50}$$

leicht als Funktion von Wellenzahl  $K$  und Coulombparameter  $\eta$  angegeben werden (AL71):

$$l_g = KR_{min} \sqrt{1 - \frac{2\eta}{KR_{min}}} \quad \text{I.51}$$

Es wird eine zwei-parametrische cut-off funktion verwandt:

$$a_l = \left( 1 + e^{\frac{l_g - l}{\Delta}} \right)^{-1} \quad \text{I.52}$$

wo  $\Delta$  der Parameter für die Diffuseness ist. In den Rechnungen wurde  $\Delta$  meist gleich 1 gesetzt. Dieser Parameter ist nur von großem Einfluß, wenn man den differentiellen Wirkungsquerschnitt für Winkel um 0 Grad bei Energien weit über der Coulombbarriere berechnet. Dann beeinflusst  $\Delta$  die Struktur des Beugungsbildes (Siehe auch Abschnitt III.1).

Bei der Summation in (I.45) werden nun die Coulombmatrixelemente  $M_{l;l_g}$  mit dem geometrischen Mittel der cut-off funktion multipliziert:

$$\text{I.53} \quad M_{1,1} l_f \rightarrow M_{1,1} l_f \sqrt{a_{1,1} a_{1,f}}$$

Die Wirkung der cut-off funktion hat eine einfache physikalische Interpretation; sie reduziert den Wirkungsquerschnitt für Streuung unter Rückwärtswinkeln ganz erheblich und läßt den Wirkungsquerschnitt für Vorwärtswinkel praktisch unverändert.

## Totaler Wirkungsquerschnitt

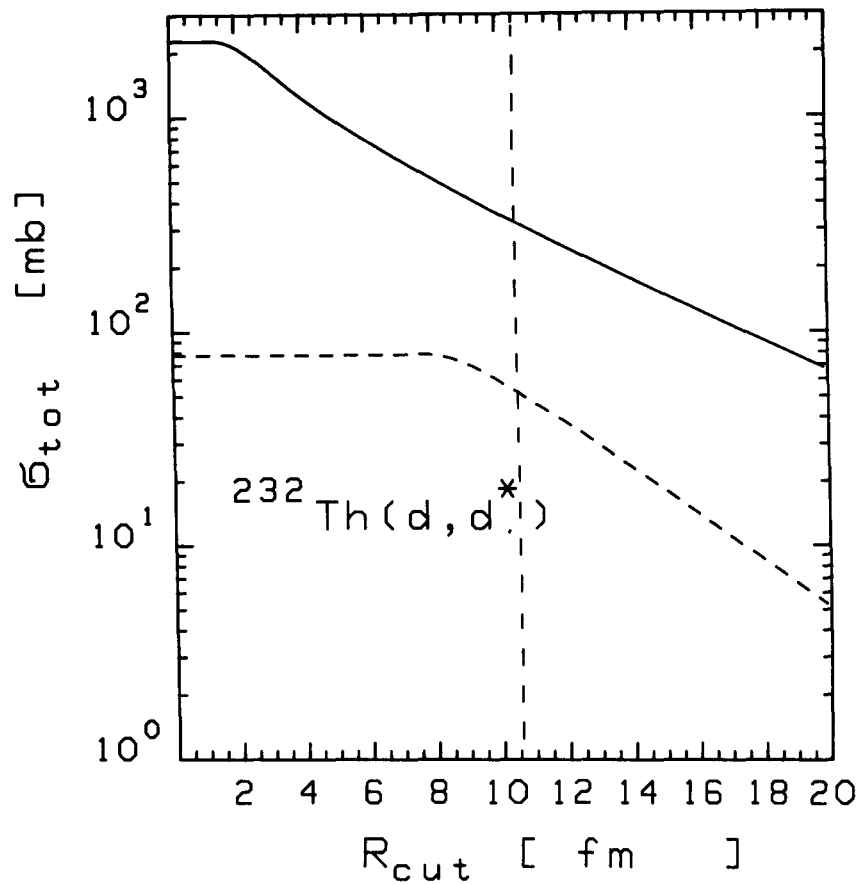
Bevor Rechnungen mit dem Strong Absorption Model betrachtet werden, soll zunächst der totale Wirkungsquerschnitt für Coulombanregung ausgerechnet werden; denn während beim differentiellen Wirkungsquerschnitt für Coulombanregung das SAM nur Änderungen bei Rückwärtswinkeln bewirkt und Details, hervorgerufen durch die Kernkräfte ohnehin nicht wiedergegeben werden können, ist das SAM beim totalen Wirkungsquerschnitt unerlässlich, will man nicht schon bei Energien nur knapp über der Coulombschwelle, zu völlig unrealistischen übergroßen Wirkungsquerschnitten kommen, deren Hauptbeitrag von Drehimpulsen herrührt, denen Bahnen durch das Innere des Targetkerns entsprechen (Figur ix und Figur x).

Den totalen Wirkungsquerschnitt für Coulombdissoziation erhalten wir durch Integration über alle Anregungsenergien des p-n Systems, Integration über die Winkel im p-n System und Integration über den Streuwinkel des Deuteronschwerpunktes.

$$\sigma_{tot} = \int dE_{re1} \int d\Omega(R) \int d\Omega(r) \frac{d^3 \sigma}{dE_{re1} d\Omega(R) d\Omega(r)} \quad I.54$$

Mit der T-matrix aus (I.45) einschließlich der Modifikation in (I.53) kann man den dreifach differentiellen Wirkungsquerschnitt über die beiden Raumwinkelelemente integrieren, indem die Orthogonalitätsrelationen für die Kugelflächenfunktionen angewandt und für die Clebsch-Gordan Koeffizienten (3.78) aus Edmonds (ED57) benutzt werden; das Ergebnis ist:

$$\begin{aligned} \sigma_{tot} = & \int dE_{re1} [(Ze^2)^2 \mu^2 \frac{64 \pi^2}{9h^4} B(E1) * \\ & * \sum_{i,f} \left[ \begin{pmatrix} 1 & i & 1 & f & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} M_{1,1,f} \right]^2 (21_f + 1)(21_i + 1)] \end{aligned} \quad I.55$$



FIGUR I.ix

Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts  
im SAM Modell vom Cut Off Parameter .

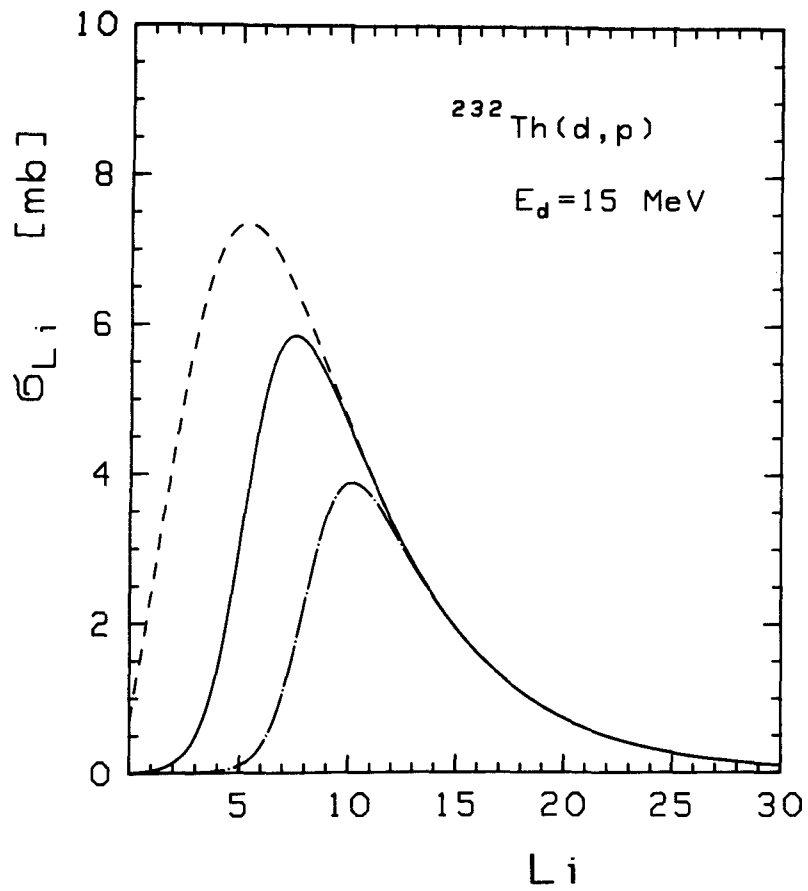
----- Ed=15 MeV

————— Ed=56 MeV

Die senkrechte Linie bei 10.5 fm entspricht dem  
Wert für  $R_{cut}$  nach der Formel (III.5)

$R_{cut} = .5 + 1.36(A^{**1/3} + 2^{**1/3})$  (in fermi)





FIGUR I.x

-----  
 Beiträge der Partialwellen zum totalen Wirkungsquerschnitt für  $R_{0ut} = 8, 10.5$  und  $12 \text{ fm}$   
 ----- 8 fm  
 ————— 10.5 fm  
 . — . — 12 fm

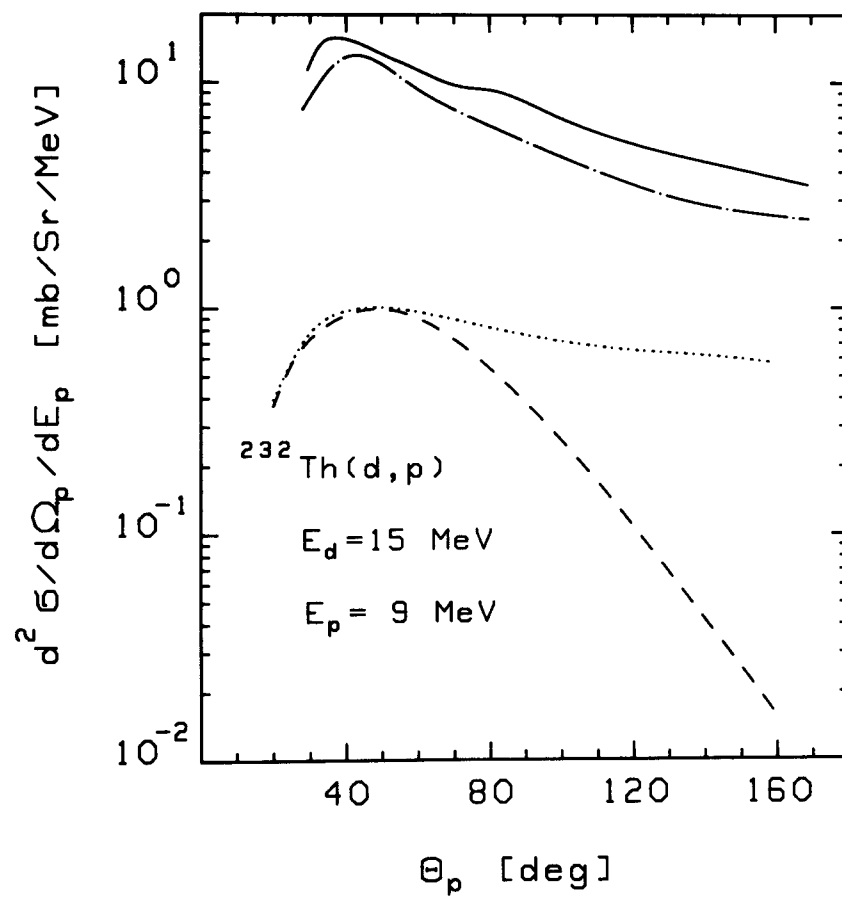
## I.8 Ergebnisse

In diesem Abschnitt sollen die Rechnungen mit den in Bonn von J.Ernst et al durchgeführten Experimenten (BI80) verglichen werde. Die Figuren I.xi und I.xii zeigen für die Reaktion  $\text{Th}(d,p)$  ( $E_d=15$  MeV) Protonwinkelverteilungen für Protonenenergien von 6 und 9 MeV. Neben den experimentell bestimmten Winkelverteilungen, und den mit dem Modell der Coulombdissoziation (mit und ohne SAM) gerechneten Winkelverteilungen ist noch das Ergebnis der Rechnungen von Baur et al mit dem FFS - Aufbruch eingezeichnet.

Für 9 MeV Protonen findet sich gute Übereinstimmung des FFS-bu mit dem Experiment, sowohl was die absolute Größe, als auch die Form der Winkelverteilung betrifft. Letzteres ist vor allem darauf zurückzuführen, daß die Theorie von Baur et al auch inelastische Prozesse (Anregung des Targets) einschließt, welche besonders bei Rückwärtswinkeln wichtig sind. Die Rechnungen für Coulombdissoziation berücksichtigen solche Reaktionen nicht, besonders das SAM Modell zeigt, daß Coulombanregung nur für Winkel bis etwa 60 Grad relevant ist. Bei 9 MeV Protonen spielt der Beitrag der Coulombdissoziation offensichtlich keine Rolle.

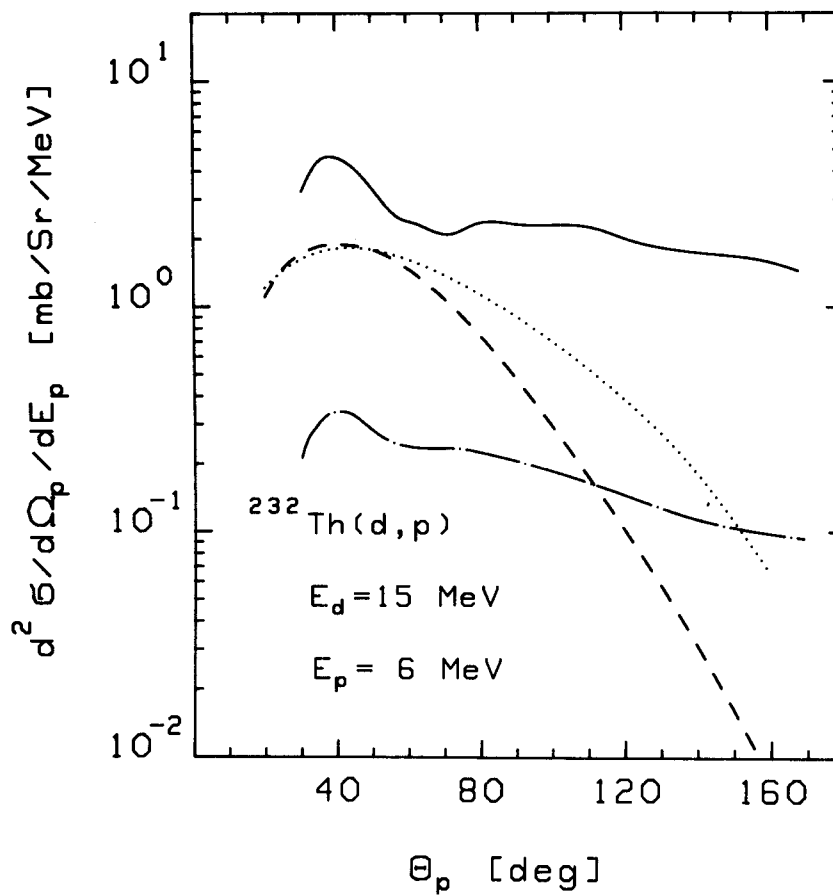
Bei der Winkelverteilung für 6 MeV Protonen stimmt die Form der FFS-bu Rechnung nach wie vor mit der gemessenen Verteilung überein, doch ist ihre Größe etwa einen Faktor 10 zu klein (bei kleineren Protonenenergien nimmt die Differenz noch zu). Hier zeigen die Rechnungen, daß die Coulombdissoziation bis zu Winkeln von etwa 70 Grad dominierend ist und fast die absolute Größe des Experiments erreicht, auch wenn die Form aus oben genannten Gründen nicht stimmt.

Beide Modelle können den Aufbruch nicht in allen Bereichen des Phasenraumes gleichgut beschreiben, doch zeigen die Ergebnisse für 6 MeV Protonen, daß der Effekt der Anregung des p-n Systems durch Coulombkräfte im allgemeinen nicht vernachlässigt werden darf. Keine der beiden DWBA-Ansätze (I.8) und (I.9) kann alleine den Aufbruch beschreiben. Eine Verbesserung ist nur möglich, wenn man in der Distorted Wave Approximation noch Terme von höherer Ordnung als den Born-term behandeln würde, so daß auch 2-stufige Prozesse explizit berücksichtigt würden.



FIGUR I.xi

— Experiment  
 - - - FFS  
 ..... Sommerfeld  
 - - - SAM

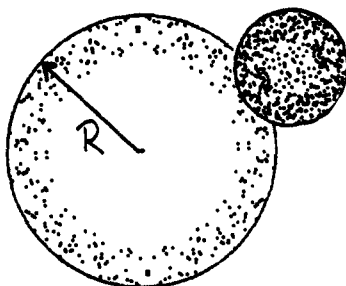


FIGUR I.xii

— Experiment  
 - . - . FFS  
 . . . . . Sommerfeld  
 - - - - SAM

### I.9 A-Abhängigkeit des totalen Wq. bei 56 MeV Deuteronen

Eine der ersten Beschreibungen von Aufbruchsreaktionen stammt von Serber (SE47). Er nahm an, daß sich das Target wie eine vollständig absorbierende Scheibe verhält. Dann findet die Desintegration des Projektils an der Oberfläche des Targets statt.



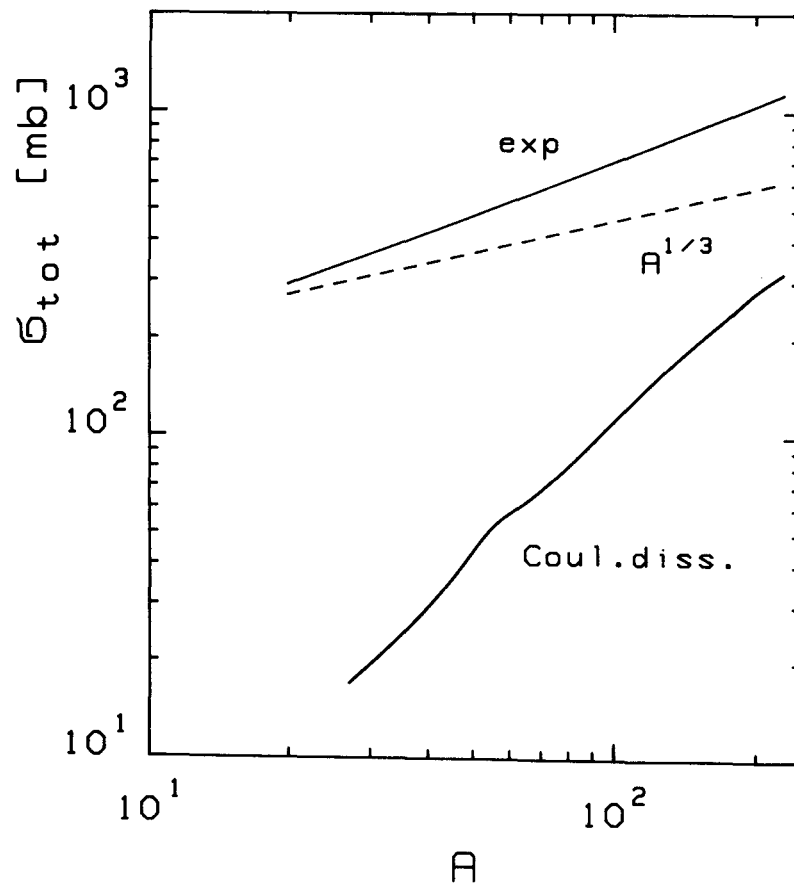
Der totale Wirkungsquerschnitt sollte deshalb mit  $R$  oder  $A^{1/3}$  anwachsen.

Experimentell beobachtet man allerdings keinen so klaren Zusammenhang zwischen  $A$  und dem Wirkungsquerschnitt. Kürzlich wurden von Matsuoka et al (MA80) Experimente durchgeführt, in denen 56 MeV Deuteronen auf Targetkerne von  $A=12$  bis zu  $A=209$  geschossen wurden. Matsuoka stellt fest, daß der Wirkungsquerschnitt mit  $(A^{1/3} \text{ fm} + .8 \text{ fm})^2$  anwächst (Figur I.xiii). Diesen unerwarteten Effekt versucht er durch die Annahme zu erklären, daß die mittlere freie Weglänge im Target für Protonen größer sei als für zusammengesetzte Teilchen. Dann wäre der Targetkern für die Protonen transparent und der Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  $(d,p)$  würde mit  $A^{2/3}$  anwachsen.

Die Rechnungen mit dem SAM Modell für Coulombdissoziation zeigen jedoch, daß man den beobachteten Wirkungsquerschnitt auch verstehen kann, ohne Transparenz des Targets anzunehmen, indem man sich den totalen Wirkungsquerschnitt für die Aufbruchsreaktion zusammengesetzt denkt, aus einem Beitrag vom Spectator Aufbruch (lokalisiert an der Kernoberfläche, also proportional zu  $A^{1/3}$ ) und einem Beitrag vom Coulombaufbruch (Figur I.xiii).

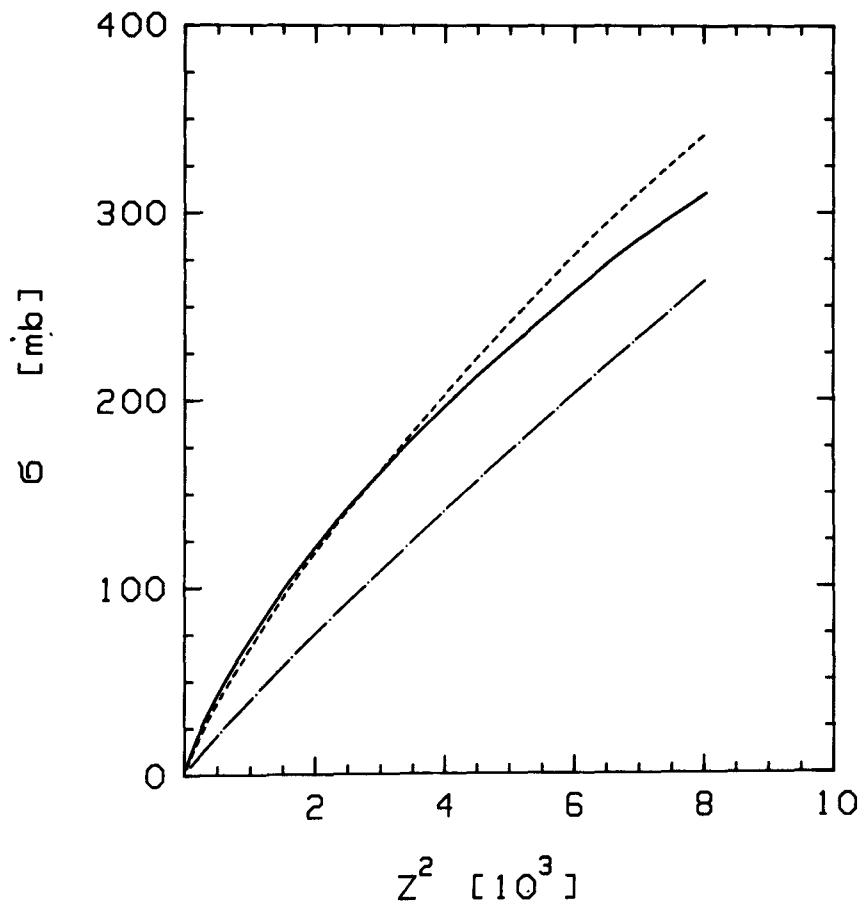
Tatsächlich gibt es keinen Grund eine einfache A-Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts zu vermuten, da sich Kern- und Coulombkräfte überlagern und die Kernkraft bei kleinen, die Coulombkraft bei großen Abständen dominiert.

Für 56 MeV zeigen die Rechnungen mit dem SAM Modell der Coulombdissoziation, daß der Wirkungsquerschnitt in etwa linear mit  $A$  anwächst. Für höhere Energien wächst die Coulombdissoziation mit  $Z^2$  an (Figur I.xiv), wie es aus der Born'schen Näherung für (I.42) zu erwarten ist (der Cut-Off stört allerdings diesen Zusammenhang)



FIGUR I.xiii

-----  
 Totaler Wirkungsquerschnitt für die Reaktion  
 (d,p) bei  $E_d=56$  MeV



FIGUR I.xv

-----

Abhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnitts  
von  $Z^{*2}$  für die Energien:

-----  $E_d = 50$  MeV

————  $E_d = 100$  MeV

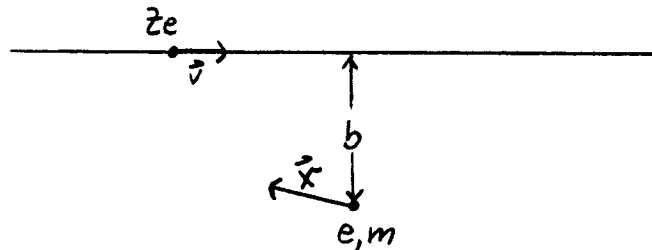
— . — . — .  $E_d = 1000$  MeV



## II.1 Harmonischer Oszillator

Ein einfaches und anschauliches Modell der Coulombanregung, das jedoch wichtige Aspekte der vollständigen Theorie, sowohl im nichtrelativistischen als auch im relativistischen Energiebereich zeigt, wird im Buch "Classical Electrodynamics" von Jackson (JA75) vorgestellt.

Dort wird ein harmonisch gebundenes Teilchen der Ladung  $e$  und der Masse  $m$  betrachtet, welches sich im Ursprung des Koordinatensystems befindet. Ein Projektil mit der Ladung  $Ze$  und der Geschwindigkeit  $v$  fliegt im Abstand  $b$  längs einer geraden Linie (straight line approximation) an dem Oszillator vorbei. Es wird angenommen, daß die Bewegung des Oszillators nichtrelativistisch behandelt werden darf. Ferner wird die Dipol-Approximation gemacht, d.h. das auf den Oszillator wirkende elektromagnetische Feld wird nur am Ursprung ausgewertet und die tatsächliche Auslenkung wird vernachlässigt.



Die Bewegungsgleichung ist dann:

$$\text{II.1} \quad \ddot{\vec{X}} + \Gamma \dot{\vec{X}} + \omega_0^2 \vec{X} = -\frac{e}{m} \vec{E}(t)$$

$\Gamma$  stellt einen kleinen Dämpfungsfaktor dar. Jackson rechnet nun den Energietransfer auf den Oszillator aus und findet für hinreichend kleines  $\Gamma$ :

$$\text{II.2} \quad \Delta E = \frac{\pi e^2}{m} |\hat{E}(\omega_0)|^2$$

wo  $\hat{E}(\omega_0)$  die Fouriertransformierte der elektrischen Feldstärke am Ursprung für die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ist. Setzt man explizit die Feldstärke ein (siehe nächster Abschnitt) so findet man:

$$\text{II.3} \quad \Delta E(b) = \frac{2Z^2 e^4}{mv^2} \left( \frac{1}{b^2} \right) \left[ \xi^2 K_1^2(\xi) + \frac{1}{\gamma^2} \xi^2 K_0^2(\xi) \right]$$

mit dem Adiabaticitätsparameter

$$\text{II.4} \quad \xi = \frac{\omega_0 b}{\gamma v} ; \quad \gamma = \left( 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right)^{-1/2}$$

Der Energietransfer hängt also nur vom Stoßparameter  $b$  und der Geschwindigkeit  $v$  des Projektils, sowie von der Form des Potentials über die Resonanzfrequenz  $\omega_0$  ab.

Durch Integration über den Stoßparameter erhält man den totalen Energieübertrag auf den Oszillator:

$$\Delta E = 2\pi \int_{R_{\min}}^{\infty} db b \Delta E(b) \quad \text{II.5a}$$

$$= \frac{4\pi Z^2 e^2}{mv} \left[ \xi K_0(\xi) K_1(\xi) - \frac{\xi^2}{2} \left( \frac{v}{c} \right)^2 (K_1^2 - K_0^2) \right]$$

$$\xi = \frac{\omega_0 R_{\min}}{\gamma v} \quad \text{II.5b}$$

Die Einführung von  $R_{\min}$  als minimalen Stoßparameter ist nötig damit das Integral nicht divergiert. Die physikalische Bedeutung von  $R_{\min}$  entspricht der von  $R_{\text{cut}}$ .

Um die Abhängigkeit des Wirkungsquerschnitts für Coulombanregung, sowohl von der Energie des Projektils als auch von der Anregungsenergie des Targets zu untersuchen, wollen wir verschiedene Grenzfälle betrachten:

i

Wir betrachten für einen Oszillator mit fester Eigenfrequenz  $\omega_0$  den Energieübertrag als Funktion der Einschußenergie  $E$ .

$$\left( \frac{v}{c} \right) \ll 1 ; \quad \gamma = 1 ; \quad \xi = \frac{\omega_0 R_{\min}}{v} \quad \text{II.6}$$

Für sehr große Energien (große  $v$ ) wird  $\xi$  sehr klein. Entwickeln der Besselfunktionen um Null führt zu:

$$\Delta E \propto \frac{1}{E} (\xi K_0(\xi) K_1(\xi)) \quad \text{II.7}$$

Läßt man nun, ohne relativistische Korrekturen zu beachten, die Energie  $E$  wachsen, so ergibt sich das asymptotische Verhalten:

$$\Delta E \propto \frac{-1}{E} \text{LOG}(\xi) \propto \frac{\text{LOG}(E)}{E} \quad \text{II.8a}$$

Das gleiche Ergebnis erhält man auch, wenn man die semiklassische  $f(E)$  Funktion für sehr große Energien betrachtet (Anhang A); dort geht der Wirkungsquerschnitt für Coulombanregung bei hohen Energien gegen Null. Im Bild des harmonischen Oszillators bietet das Verhalten des Impulsübertrages eine anschauliche Erklärung:

$$\Delta P = F \Delta t \quad \text{II.8b}$$

Mit wachsender Geschwindigkeit des Projektils wird  $\Delta t$  immer kleiner, im nichtrelativistischen Modell bleibt jedoch die Kraft  $F$ , die das elektrische Feld auf den Oszillator ausübt konstant, so daß der Impulsübertrag schließlich verschwindet.

ii

Nun betrachten wir ein Projektil mit der konstanten Energie  $E$  und untersuchen die Abhängigkeit des Energieübertrags als Funktion der Oszillatorfrequenz  $\omega_0$ .

$$\text{II.9} \quad \left(\frac{v}{c}\right) \ll 1 \quad ; \quad \gamma = 1 \quad ; \quad \xi = \frac{\omega_0 R_{\min}}{v}$$

Wenn die Eigenfrequenz des Oszillator hoch liegt, wird der Adiabazitätsparameter sehr groß und durch entwickeln der modifizierten Besselfunktionen in (II.5a) ergibt sich:

$$\text{II.10} \quad \Delta E \propto e^{-2\xi}$$

Ist  $\xi$  sehr groß, so setzt der sogenannte adiabatische Cut-Off ein.

Es ist also nicht möglich mit nichtrelativistischen Projektilen hochliegende Zustände, wie z.B. Riesenresonanzen, durch elektromagnetische Kräfte anzuregen.

iii

Bei relativistischen Geschwindigkeiten  $v \simeq c$  wird der adiabatische Cut-Off gemildert, da dann  $\xi$  um den Faktor  $1/\gamma$  kleiner wird:

$$\text{II.11} \quad \xi = \frac{\omega_0 R_{\min}}{c} \frac{1}{\gamma} \quad ; \quad \gamma \gg 1$$

Außerdem verändert sich das Hochenergieverhalten beim Oszillatormodell (und bei der Dipolanregung) (AB72;3.6.8):

$$\text{II.12a} \quad \Delta E = \frac{4 \pi Z^2 e^2}{mc^2} \left[ \underset{\substack{\downarrow \\ \text{LOG}(\xi)}}{\xi K_0 K_1} - \frac{\xi^2}{2} (\underset{\substack{\downarrow \\ \text{CONST.}}}{K_1^2 - K_0^2}) \right]$$

II.12b

$$\Rightarrow \Delta E \rightarrow -\text{LOG}(\xi) \propto \text{LOG}(\gamma)$$

Der Energieübertrag divergiert also logarithmisch mit wachsendem  $\gamma$ .

Anschaulich liegt der Unterschied zum nichtrelativistischen Modell darin, daß der Impulsübertrag auf den Oszillator selbst bei großen Geschwindigkeiten nicht Null wird. Die Zeit des Vorbeiflugs wird zwar um den Faktor  $\gamma$  kleiner, doch gleichzeitig wird die Stärke des elektromagnetischen Feldes um  $\gamma$  größer. Für eine Bahn mit Stoßparameter  $b$  ist die Zeit, in der das elektrische Feld merklich von Null verschieden ist, gegeben durch:

$$\Delta t \approx \frac{b}{\gamma v} \approx \frac{b}{\gamma c} \quad \text{II.13a}$$

$$\Delta P = F \Delta t \approx \gamma \frac{Ze^2}{b} \frac{b}{\gamma c} \rightarrow \text{const.} \quad \text{II.13b}$$

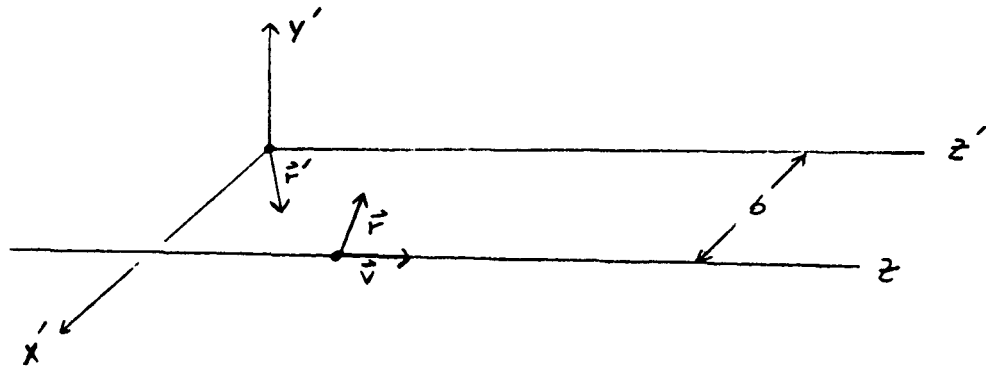
wobei  $E$  die Feldstärke im nichtrelativistischen Fall ist.

## II.2 Relativistische Coulombanregung

Im Unterschied zu anderen Kernreaktionen tritt die Coulombanregung durch Projektile mit relativistischen Energien nur unter extremen Vorwärtswinkeln auf, d.h. der minimale Abstand ist so groß, daß Target und Projektil einander (klassisch) nicht berühren. Bei relativistischen Energien ist die Geschwindigkeit des Projektils praktisch konstant und die Bahn des Projektils kann durch eine Gerade approximiert werden. Das Problem der relativistischen Coulombanregung ist von Alder und Winther (AL79) in erster Ordnung Störungstheorie im Rahmen der straight-line Näherung untersucht worden. Ganz analog zur semiklassischen Theorie der nichtrelativistischen Coulombanregung ergibt sich die Wahrscheinlichkeit das Target aus dem Zustand  $i$  in den Zustand  $f$  anzuregen zu:

$$\text{II.14 } P_{i \rightarrow f} = \left| \frac{1}{i\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega_f t} \langle f | V(\vec{r}(t)) | i \rangle \right|^2$$

Das Wechselwirkungspotential muß in das Ruhesystem des Targets transformiert werden. Dazu betrachten wir eine Gerade mit Stoßparameter  $b$ :



Im Ruhesystem des Projektils hat man das skalare Potential  $\Phi$  und das Vektorpotential  $\vec{A}$ :

$$\text{II.15a } \Phi(\vec{r}, t) = \frac{Z_1 Z_2 e}{r}$$

$$\text{II.15b } \vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{0}$$

Nach Lorentztransformation erhält man im Ruhesystem des Targets:

$$\text{II.16a } \Phi'(\vec{r}', t') = \frac{\gamma Z_1 Z_2 e}{\sqrt{(b-x')^2 + y'^2 + \gamma^2 (z' - vt')^2}}$$

$$\text{II.16b } \vec{A}'(\vec{r}', t') = \frac{\vec{v}}{c} \Phi'$$

Durch Fouriertransformation des Potentials folgt:

$$\Phi(\vec{r}', \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \Phi(\vec{r}', t) e^{i\omega_1 t} \quad \text{II.17}$$

Nun wird die Fouriertransformierte nach Multipolen entwickelt:

$$\Phi(\vec{r}', \omega) = \sum_{\lambda\mu} W_{\lambda\mu}(\vec{r}', \omega) Y_{\lambda\mu}^*(\hat{r}') \quad \text{II.18}$$

Die  $W_{\lambda\mu}$  sind komplizierte Funktionen, die modifizierte Besselfunktionen und Gegenbauerpolynome enthalten (AL79), (Anhang C). Nach Einsetzen in (II.14) und Integration über alle Stoßparameter von  $Q_{\text{min}}$  bis  $\infty$  erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{if} = \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar c} \right)^2 \sum_{\lambda\mu} k^{2(\lambda-1)} B(\pi\lambda) / e^2 |G_{\pi\lambda\mu}(\frac{c}{v})|^2 g_{\mu}(\xi) \quad \text{II.19a}$$

$$k = \frac{\omega}{c} \quad ; \quad \pi = E \text{ oder } M \quad \text{II.19b}$$

Der Wirkungsquerschnitt faktorisiert also in einen Teil, der nur von den elektromagnetischen Übergangsamplituden des Targetkerns abhängt und einen Faktor  $G_{\pi\lambda\mu}(\frac{c}{v})$ , der über die Geschwindigkeit die Stärke des elektromagnetischen Feldes beschreibt und einen Faktor  $g_{\mu}(\xi)$ , der nur vom Adiabazitätsparameter abhängt.

Für kleine Stoßenergien muß die Coulombabstoßung berücksichtigt werden. Alder und Winther zeigen in ihrer Arbeit, daß der Stoßparameter  $b$  ersetzt werden muß durch

$$b \rightarrow b + \frac{\pi}{2} a \quad \text{II.20}$$

wobei, wie in (I.19),  $2a$  den minimalen Abstand bei einer "head on collision" angibt. Der Adiabazitätsparameter ist dann:

$$\xi(R) = \frac{\omega}{\gamma v} \left( R + \frac{\pi}{2} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{m_0 v^2 \gamma} \right) \quad \text{II.21a}$$

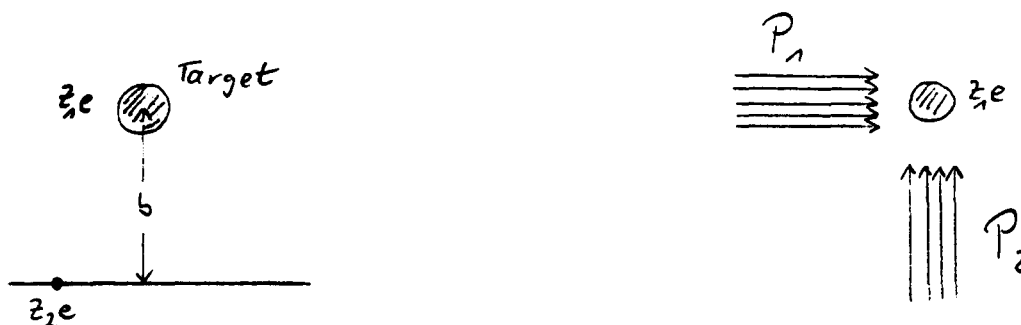
$$m_0 = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad \text{II.21b}$$

Ohne diese Modifikation würde die relativistische Theorie, im Vergleich mit den Ergebnissen des SAM, den Wirkungsquerschnitt bei kleinen Energien überschätzen. Die Ausbildung des lokalen Maximums im Wirkungsquerschnitt für die Coulombdissoziation des Deuterons (Figur II.i) könnte ohne die Modifikation des Stoßparameters nicht wiedergegeben werden. (Siehe auch Figur II.ii)

## II.3 Weizsäcker Williams Methode

Eine weitere Möglichkeit die Coulombanregung eines Targetkernes durch ein Projektil mit relativistischer Energie zu berechnen, bietet die sogenannte Weizsäcker Williams Methode der "virtuellen Quanten". Der hier interessierende Fall, daß sich das Projektil längs einer Geraden bewegt, ist ausführlich im Buch von Jackson, "Classical Electrodynamics", (JA75) behandelt worden.

Das Ergebnis ist, daß das elektromagnetische Feld im Ruhesystem des Targets, verursacht durch das schnell bewegte Projektil, ersetzt werden kann durch zwei Strahlungspulse P1 und P2, deren Frequenzspektrum durch die Fouriertransformierte des elektrischen Feldes bestimmt wird.



In Abhängigkeit vom Stoßparameter  $b$  sind die Spektren gegeben durch:

$$\left. \begin{array}{l} \text{II.22a} \quad \frac{dI_1(\omega, b)}{d\omega} \\ \text{II.22b} \quad \frac{dI_2(\omega, b)}{d\omega} \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi^2} \frac{(Z_1 e)^2}{c} \left( \frac{c}{v} \right)^2 \frac{1}{b^2} \left\{ \begin{array}{l} \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 K_1^2 \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right) \\ \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right)^2 K_0^2 \left( \frac{\omega b}{\gamma v} \right) \end{array} \right.$$

Für sehr große  $\gamma$  darf der Strahlungspuls P2 wegen des Faktors  $1/\gamma$  vernachlässigt werden. Den Wirkungsquerschnitt für Coulombanregung erhält man nun durch Multiplikation von (II.22) mit der Photoabsorptionswahrscheinlichkeit für E(M) Strahlung. Analog zur Theorie der relativistischen Coulombanregung erhält man den totalen Wirkungsquerschnitt durch Integration über alle Stoßparameter von  $R_{\min}$  bis  $\infty$ . Die Abstoßung im Coulombfeld wird ebenfalls wie in (II.20) berücksichtigt.

Für elektrische Dipolanregung ist das Ergebnis :

$$\text{II.23} \quad \sigma = \frac{32 \pi^2}{9} \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar c} \right)^2 \left( \frac{c}{v} \right)^2 \left\{ \epsilon K_0 K_1 - \frac{v^2}{2c^2} [K_1^2 - K_0^2] \right\} B(E1) / e^2$$

Die Weizsäcker Williams Methode stimmt für elektrische Dipolanregung exakt mit dem Ergebnis der Theorie der relativistischen Coulombanregung überein. Für Multipole  $\lambda > 1$  stellt sie allerdings eine schlechte Approximation dar. Den Grund hierfür kann man sich leicht veranschaulichen, wenn man den Grenzfall  $\gamma$  sehr groß betrachtet. Dann wird bei

der Weizsäcker Williams Methode nur der Puls P1 wichtig, d.h. das Strahlungsfeld entspricht dem einer ebenen Welle. Dann können aber nur Unterzustände mit magnetischer Quantenzahl  $\mu = \pm 1$  angeregt werden.

Die Theorie der relativistischen Coulombanregung zeigt aber, daß für große Energien gerade die Zustände mit  $\mu = \pm 1$  bevorzugt angeregt werden.

Für ausführlichere Formeln sei auf Anhang C verwiesen.



#### II.4 Coulombdissoziation des Deuterons bei hohen Energien

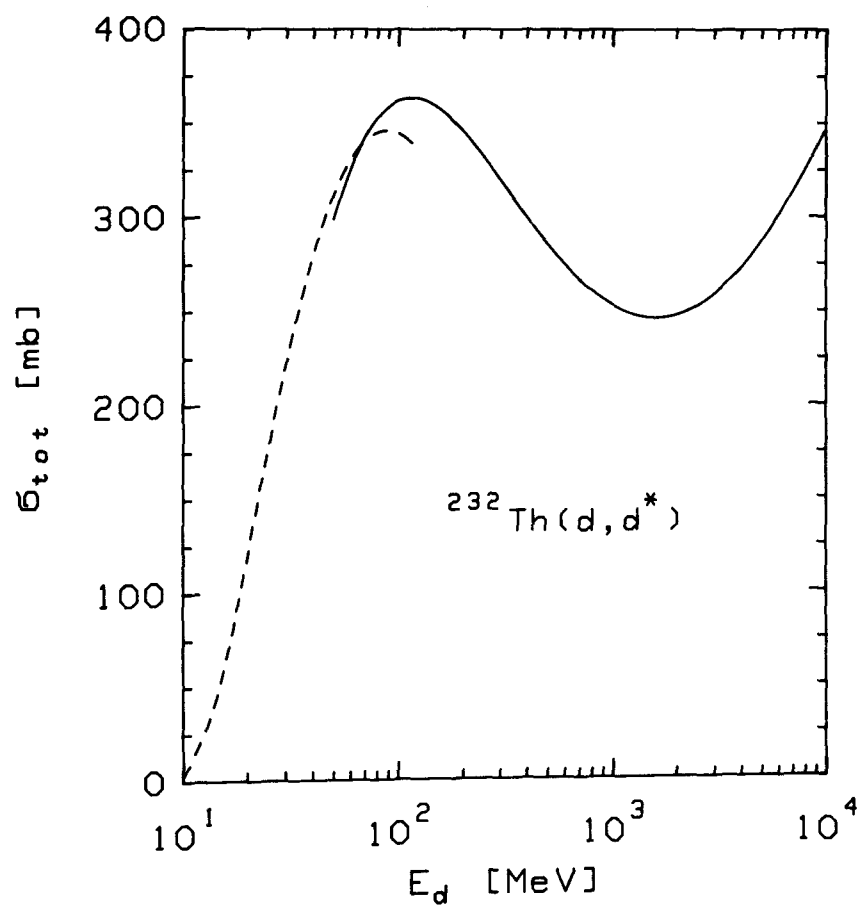
Die Coulombdissoziation des Deuterons war für kleine Energien mit dem Strong Absorption Model berechnet worden. Für den Targetkern Thorium ist der totale Wirkungsquerschnitt nach dem SAM Modell bis zu Energien von 200 MeV in Figur II.i eingezeichnet. Erhöht man die Energie weiter, so wird der Wirkungsquerschnitt kleiner und geht schließlich, wie in (II.8) gezeigt, gegen Null.

Für Deuteronenergien von 50 MeV bis zu  $10^{*5}$  MeV ist der totale Wirkungsquerschnitt nach der Theorie der relativistischen Coulombanregung berechnet worden. Bei 100 MeV existiert ein lokales Maximum, dann wird der Wirkungsquerschnitt kleiner, erreicht bei 2 GeV sein Minimum, um dann wie (II.12) wieder anzuwachsen. Im Bereich von 50 bis 100 MeV stimmen beide Rechnungen befriedigend überein. Eine genaue Übereinstimmung ist nicht zu erwarten, da das relativistische Modell letztlich nur die straight line Näherung benützt; außerdem wird im relativistischen Modell ein "sharp cut - off" gemacht, wogegen das SAM einem "smooth cut - off" entspricht.

Weiter ist in Figur(II.ii) eine Rechnung mit der Weizsäcker Williams Methode gezeigt, wobei nur der Impuls  $P_1$  berücksichtigt worden ist. Diese Näherung "konvergiert" für Energien um  $10^{*4}$  MeV gegen die "exakte" Rechnung, in der beide Pulse zum Wirkungsquerschnitt beitragen. Außerdem ist noch der Wirkungsquerschnitt eingetragen, der sich ergibt, wenn die Modifikation von  $\bar{\epsilon}$  durch Coulombabstoßung weggelassen wird. Der Querschnitt ist dann für kleine Energien im Vergleich mit den Ergebnissen des nicht-relativistischen SAM viel zu groß.

Von Jäckle und Pilkhun (JÄ75) wurde neben der Coulombanregung des Deuterons auch der "akademische" Fall der Coulombanregung des Antideuterons untersucht. Figur II.iii zeigt für den Targetkern Blei einen Vergleich mit unseren Rechnungen. Die Abweichung in der absoluten Größe deutet darauf hin, daß Pilkhun eine andere zero - range Korrektur gemacht hat, doch geht aus seiner Arbeit nicht klar hervor welchen  $B(E1)$  Wert er benutzt hat.

In allen Berechnungen des totalen Wirkungsquerschnittes für Coulombdissoziation des Deuterons muß über die Anregungsenergie im p-n System integriert werden. Figur II.iv zeigt den Integranden als Funktion der Wellenzahl im p-n System. Selbst für sehr große Deuteronenergien kommt der Hauptbeitrag von Anregungsenergien mit  $k$  etwa  $.15 \text{ fm}^{-1}$ , entsprechend 1 MeV. Damit liegt das Schwergewicht der Integration auf Anregungsenergien, für die der  $B(E1)$  Wert (I.17) noch zuverlässig angegeben werden kann.

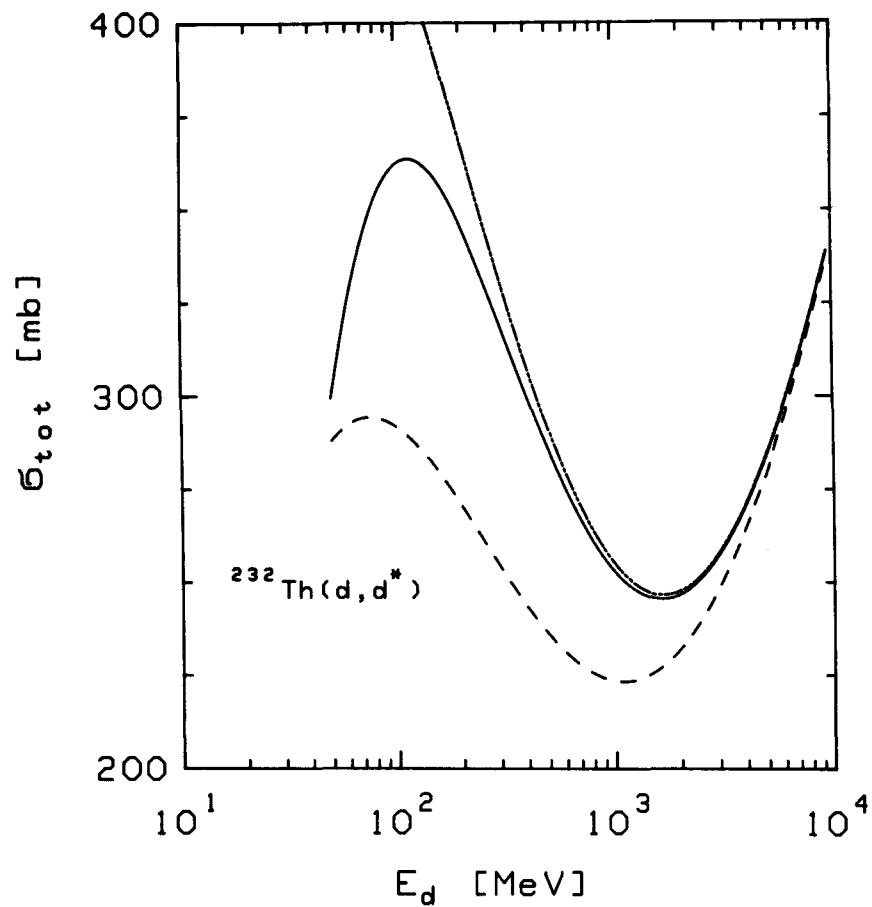


FIGUR II.1

-----  
 Totaler Wirkungsquerschnitt für Coulomb-  
 dissoziation als Funktion der Energie  $E_d$ .

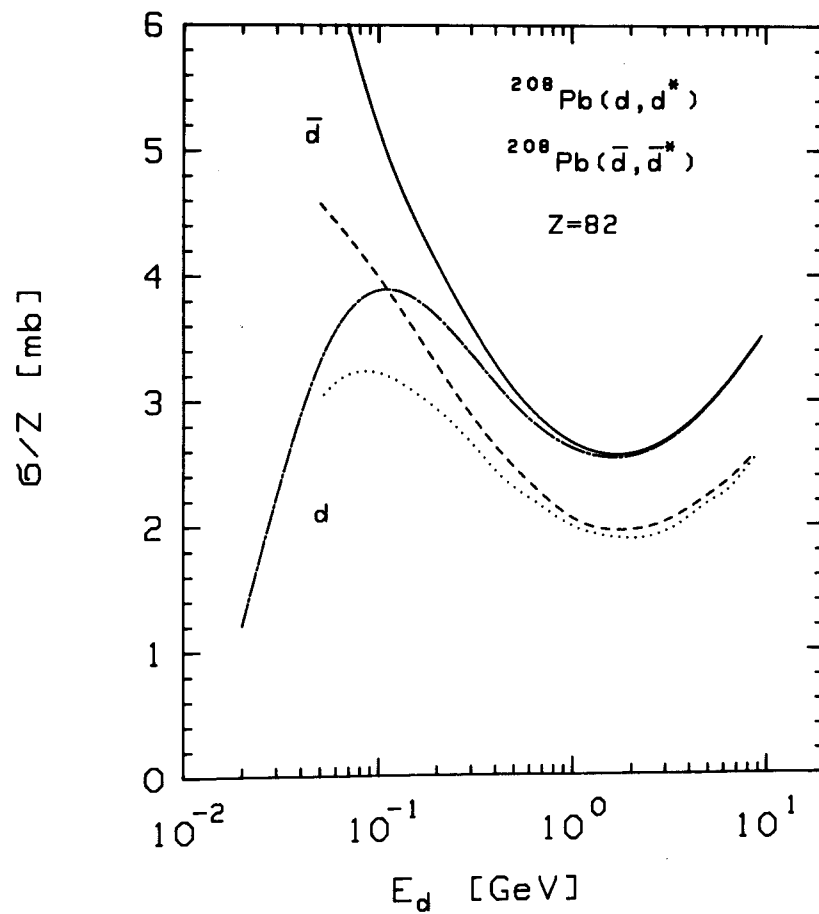
----- SAM

———— rel.Coul.Exc.



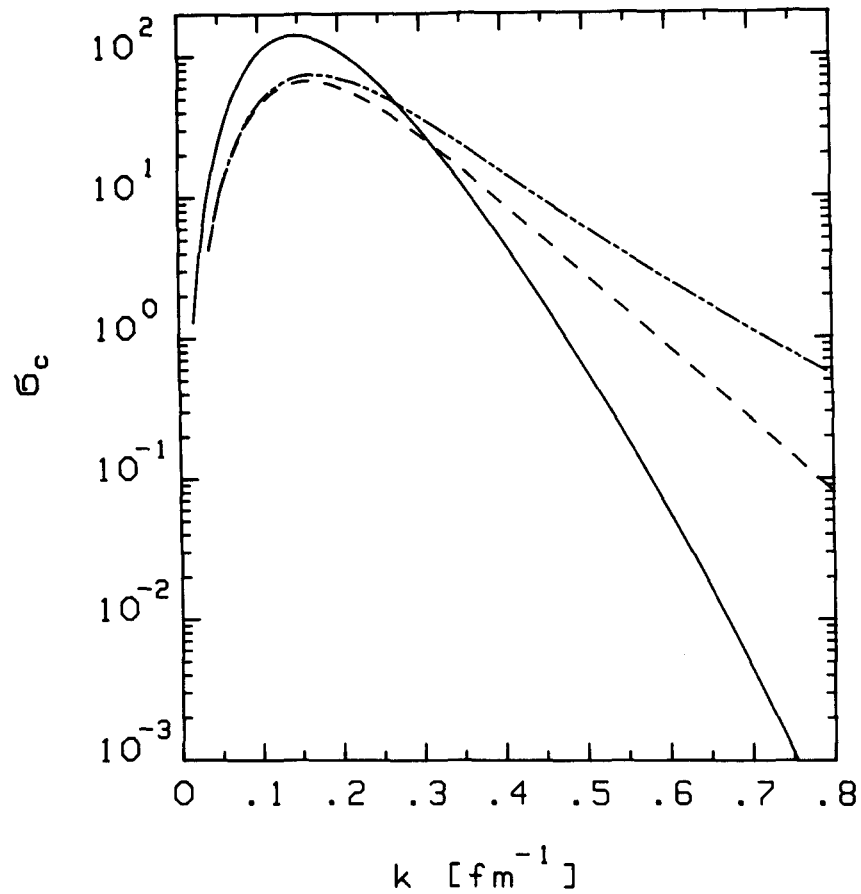
FIGUR II.11

-----  
 Coulombdissoziation gerechnet nach der  
 Weizsäcker Williams Methode.  
 - - - - - Nur Puls P1  
 ————— P1 + P2  
 - · - · - P1 + P2 ohne Modifikation von  $f$   
 (II.21) durch Coulombabstoßung



FIGUR II.iii

----- Dissoziationswahrscheinlichkeit des Deuterons  
 und Antideuterons.  
 -----  $(\bar{d})$  .....  $(d)$  Jäckle und Pilkhuhn  
 ———  $(\bar{d})$  ---  $(d)$  rel.Coul.Exc.



FIGUR II.iv

-----  
 Beitrag zum totalen Wirkungsquerschnitt als  
 Funktion der Wellenzahl im p-n System

————— Ed= 100 MeV  
 ----- Ed= 1000 MeV  
 - - - - - Ed= 10000 MeV

$$\sigma_{tot} = \int dk \sigma_c(k)$$

## Differentialielle Wirkungsquerschnitte

In diesem Kapitel soll die Theorie der Coulombanregung durch relativistische und nichtrelativistische Projektile auch auf andere Teilchen als das Deuteron angewendet werden. Insbesondere soll die Möglichkeit der Anregung von Riesenresonanzen mit dem Ziel untersucht werden, die Größe des Wirkungsquerschnitts, seine Abhängigkeit von der Energie des Projektils und von der Anregungsenergie der Resonanz festzustellen. Für einen Überblick reicht es aus, die  $B(E\lambda)$  Werte aus den energiegewichteten Summenregeln zu verwenden, wobei die ganze Stärke des Übergangs in einer Energie konzentriert werden kann. Es ist allerdings kein Problem wie beim Deuteron über die Anregungsenergie zu integrieren. Wir verwenden (RI80)

$$E(1) = 80 / \tilde{R} \quad \text{III.1}$$

$$B(E1)/e^2 = \frac{9\hbar^2 NZ}{8\pi m A E(1)} = 14.8 \frac{NZ}{A E(1)} \quad \text{III.2}$$

$$\lambda \geq 2 \quad E(\lambda) = \frac{41 \sqrt{\lambda}}{\tilde{R}} \quad \text{III.3b}$$

$$B(E\lambda)/e^2 = 5 \lambda (2\lambda + 1) Z R^{(2\lambda-2)} / E(\lambda) \quad \text{III.3b}$$

$$\tilde{R} = 1.2 R \quad ; \quad R = A^{1/3} \quad \text{III.4}$$

Zuerst soll mit dem Strong Absorption Modell der differentialielle Wirkungsquerschnitt für die Anregung der Dipol-Riesenresonanz (GDR) in Blei durch Alphateilchen berechnet werden. Die Kenntnis dieser Anregungswahrscheinlichkeit ist z.B. wichtig, wenn man die Monopolresonanz durch Hadronstreuung untersucht. Der Beitrag von Kernkräften zur Anregung der GDR ist klein (DE81), die Coulombanregung dominiert bei kleinen Streuwinkeln. Es soll deshalb mit den in den vorigen Kapiteln entwickelten Modellen der reine Coulombbeitrag berechnet werden. Die Interferenz von elektromagnetischen und nuklearen Kräften kann natürlich nicht exakt berücksichtigt werden. Zunächst wird die Anregung der GDR durch Alphateilchen der Energie 172.5 MeV betrachtet. Der Cut - Off Radius wurde (wie beim Deuteron) bestimmt durch (NÖ80):

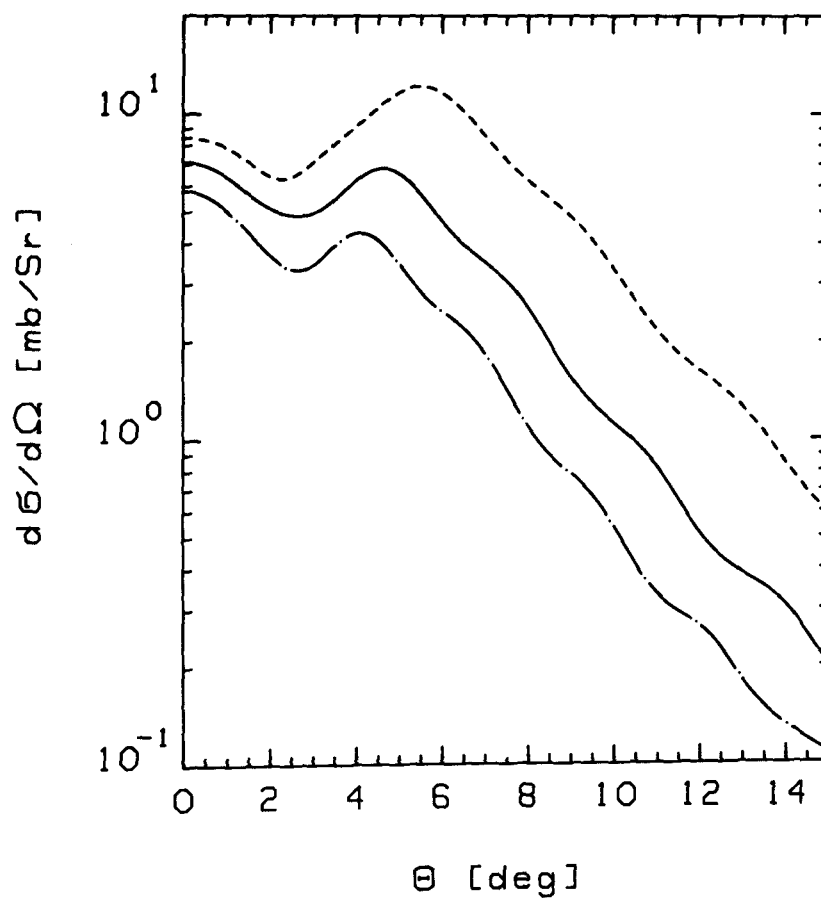
$$R_{\text{cut}} = .5 \text{ fm} + 1.36 (A_1^{1/3} + A_2^{1/3}) \text{ fm} \quad \text{III.5}$$

Bei der Rechnung mit dem SAM wurde über 400 Partialwellen summiert, eine weitere Erhöhung der Partialwellenzahl brachte keine Änderung des Ergebnisses mehr.

In Figur(III.i) und (III.ii) ist die Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnitts von den Parametern des Strong Absorption Modells  $R_{cut}$  und der Diffuseness  $\Delta$  gezeigt.

Das Ergebnis der Rechnungen ändert sich nur wenig, solange die Parameter in physikalisch sinnvollen Grenzen verändert werden. Cut Off Parameter wie  $R_{cut} = 0$  ergeben natürlich unrealistische Ergebnisse. Die Form der Winkelverteilung entspricht in groben Zügen der Form, die von Standard DWBA Codes errechnet wird (BUE81), doch ist der numerische Aufwand erheblich geringer (Figur III.iii)

Figur(III.iv) zeigt die Abhängigkeit des differentiellen Wirkungsquerschnittes für die Anregung der GDR von der Lage der Resonanz. Schon Verschiebungen von .5 MeV ändern den Wirkungsquerschnitt um etwa 10 Prozent.

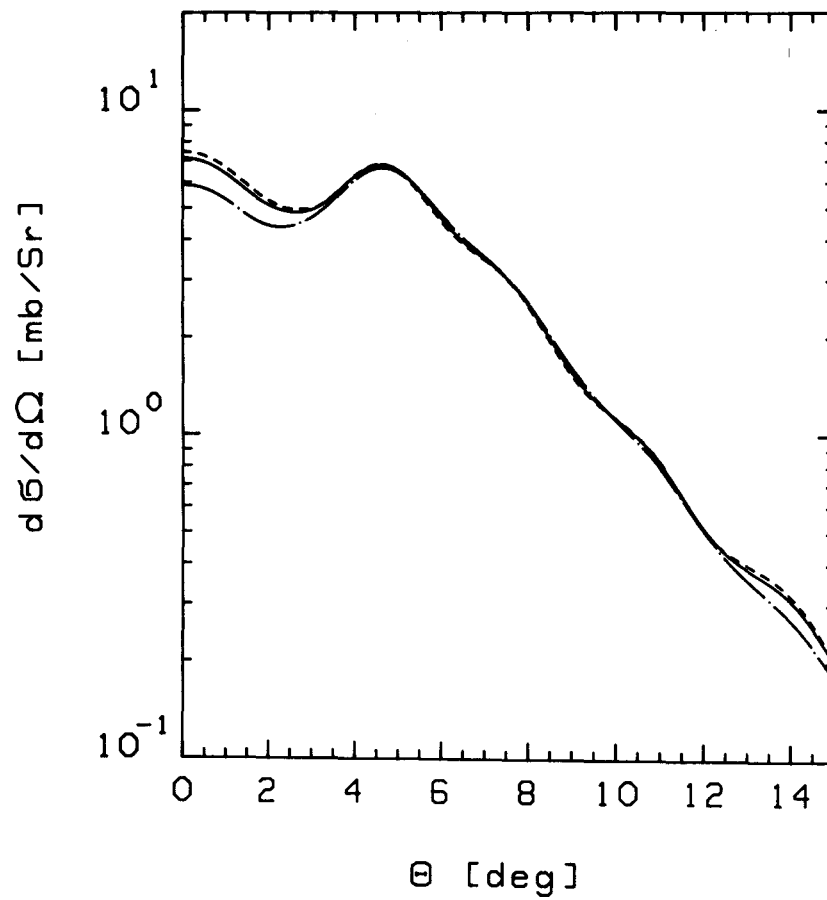


FIGUR III.1

Abhängigkeit des diff. Wq. vom Cut-Off  
Parameter  $R$  bei der Reaktion  
 $\text{Pb}(\alpha, \alpha'), E_\alpha = 172 \text{ MeV}$

—  $R = 10.7 \text{ fm}$   
- - -  $R = 9.0 \text{ fm}$   
- · - · -  $R = 12.0 \text{ fm}$

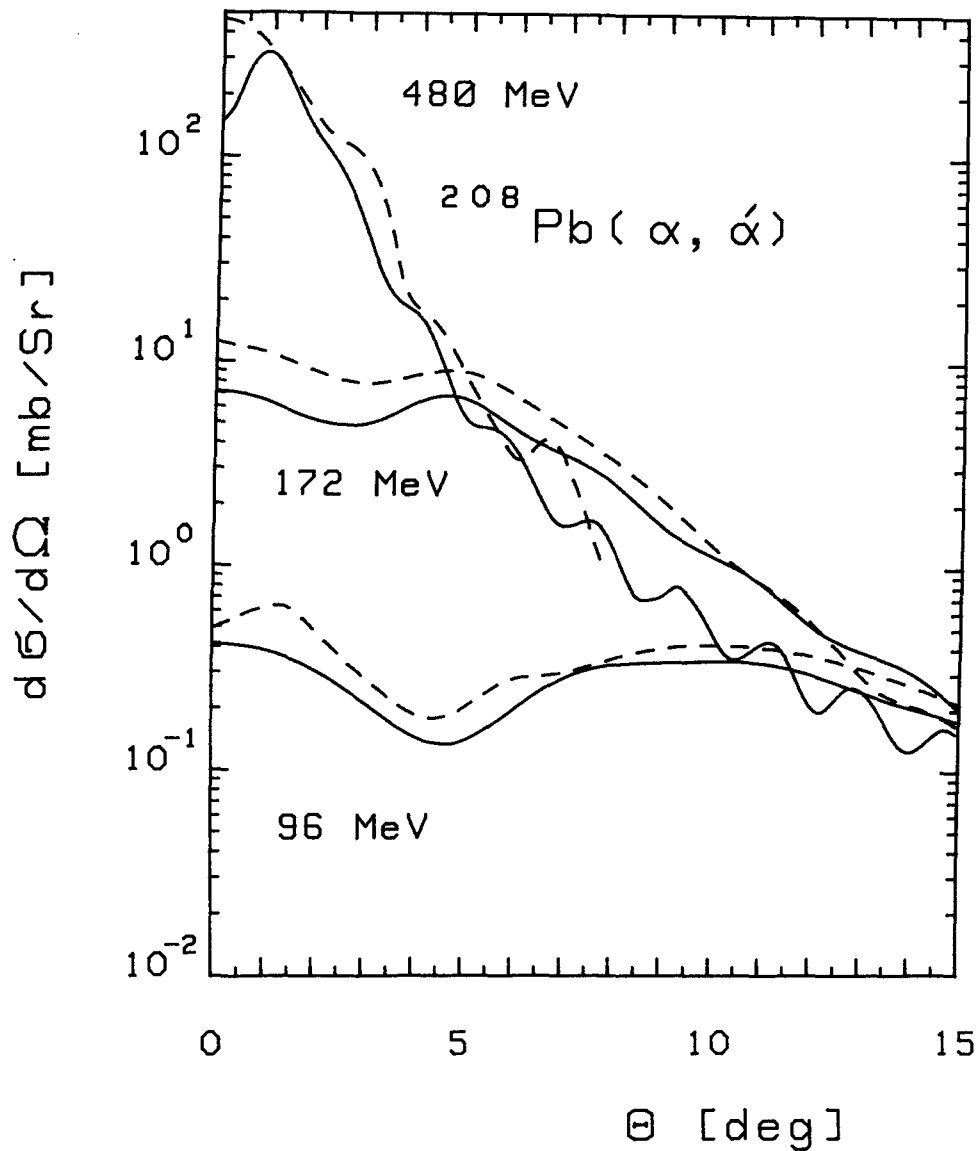




FIGUR III.ii

Abhängigkeit des diff.Wq. vom Cut-Off  
Parameter  $\Delta$  bei der Reaktion  
 $\text{Pb}(\alpha, \alpha)$ ,  $E_\alpha = 172 \text{ MeV}$

—  $\Delta = 1$   
- · -  $\Delta = 2$   
- - -  $\Delta = 0.5$



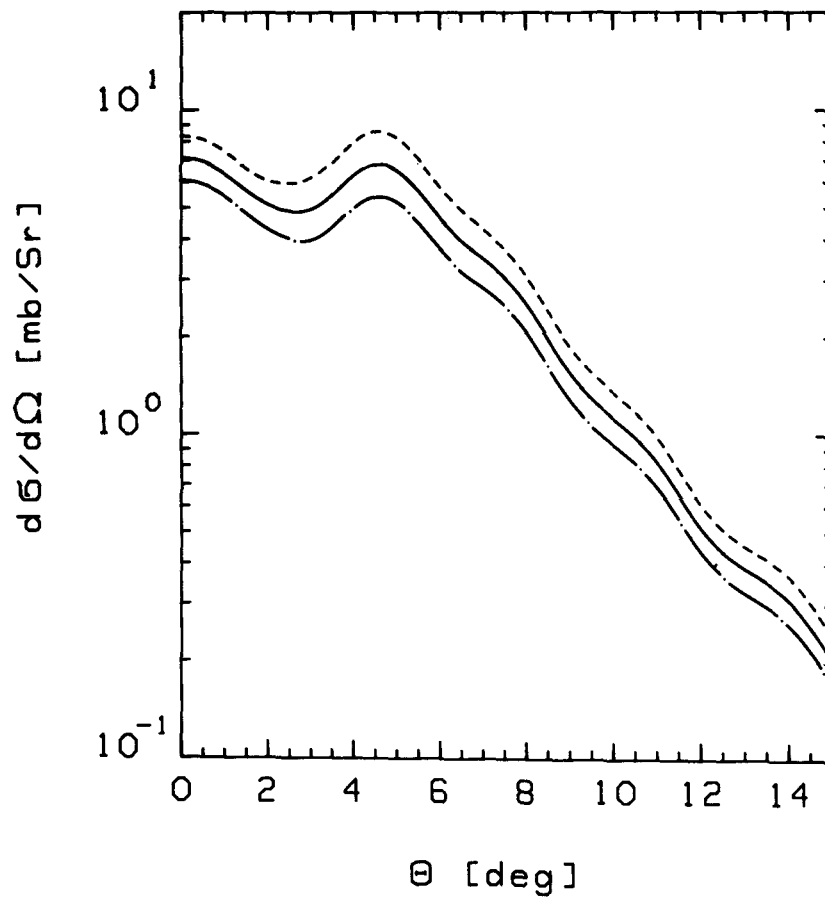
FIGUR III.iii

Vergleich mit Standard DWBA Rechnungen (BUE81) bei der Reaktion  $Pb(\alpha, \alpha')$  für verschiedene Energien

----- DWBA

———— SAM

Für die GDR wurde eine Anregungsenergie von 13.5 MeV und ein  $B(E1)$  Wert von 100 % der energiegewichteten Summenregel angenommen.



FIGUR III.iv

Abhängigkeit des diff.Wq. von der Anregungs-  
energie der GDR in Blei.

$E_\alpha = 172 \text{ MeV}$

—  $E_{\ell\chi c} = 13.5 \text{ MeV}$

- - -  $E_{\ell\chi c} = 13.0 \text{ MeV}$

- . -  $E_{\ell\chi c} = 14.0 \text{ MeV}$

### III.2 Totale Wirkungsquerschnitte

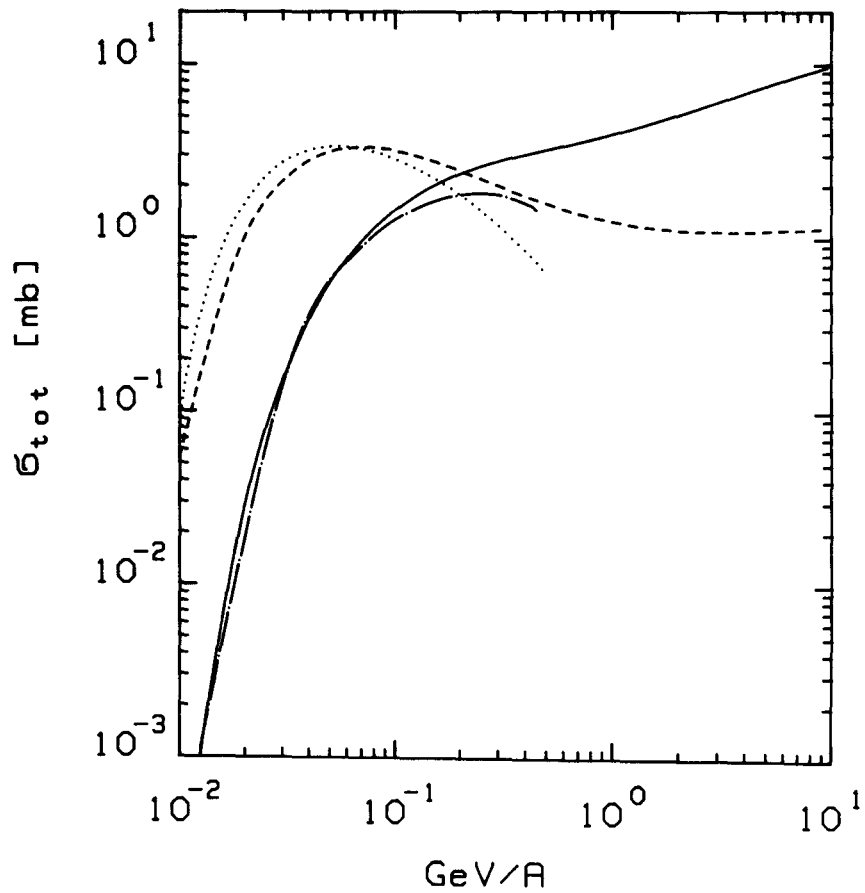
Wir untersuchen hier wiederum für den Targetkern Blei den totalen Wirkungsquerschnitt für die Anregung der GDR sowie der Quadropolriesonanz als Funktion der kinetischen Energie der Alphateilchen.

Für kleine Energien werden die Ergebnisse der Rechnungen des SAM mit denen der relativistischen Coulombanregung (Figur III.v) verglichen. Bis zu Energien von .1 GeV/A ist die Übereinstimmung für  $\lambda=1$  zufriedenstellend. Bei  $\lambda=2$  sind die Abweichungen etwas größer. Für kleine Energien ist der totale Wirkungsquerschnitt für  $\lambda=2$  größer als für  $\lambda=1$ , was daran liegt, daß die Anregungsenergie der Quadropolresonanz etwa 4 MeV kleiner ist als die der GDR.

Bei großen Energien strebt der Wirkungsquerschnitt für  $\lambda=2$  gegen eine Konstante, der für  $\lambda=1$  wächst dagegen weiter (Anhang C.5d,e). In der Figur(III.vi) ist gezeigt wie sich die Anregungswahrscheinlichkeit ändert, wenn Neon ( $Z=10$ ) statt der Helium ( $Z=2$ ) Projektile verwandt wird.

Die Kurven für die Wirkungsquerschnitte sind oberhalb von .1 GeV/A parallel zueinander. Sie unterscheiden sich um den Faktor  $10^{2/2^{2}} = 25$ . Der Wirkungsquerschnitt wächst also bei diesen hohen Energien mit  $Z^{2}$ .

Dieses asytmotische Verhalten erlaubt es, die Anregungswahrscheinlichkeit für sehr viele Target - Projektil Systeme kompakt darzustellen (Figur III.vii). Hier ist für mehrere Anregungsenergien der Wirkungsquerschnitt pro  $Z^{2}$  sowie pro  $B(E1)/e^2$  gezeigt.



FIGUR III.v

Vergleich von Rel.Coul.Exc. mit dem SAM, bei der Reaktion  $Pb(\alpha, \alpha')$ , für die Multipolaritäten 1 und 2.

$\lambda = 1$

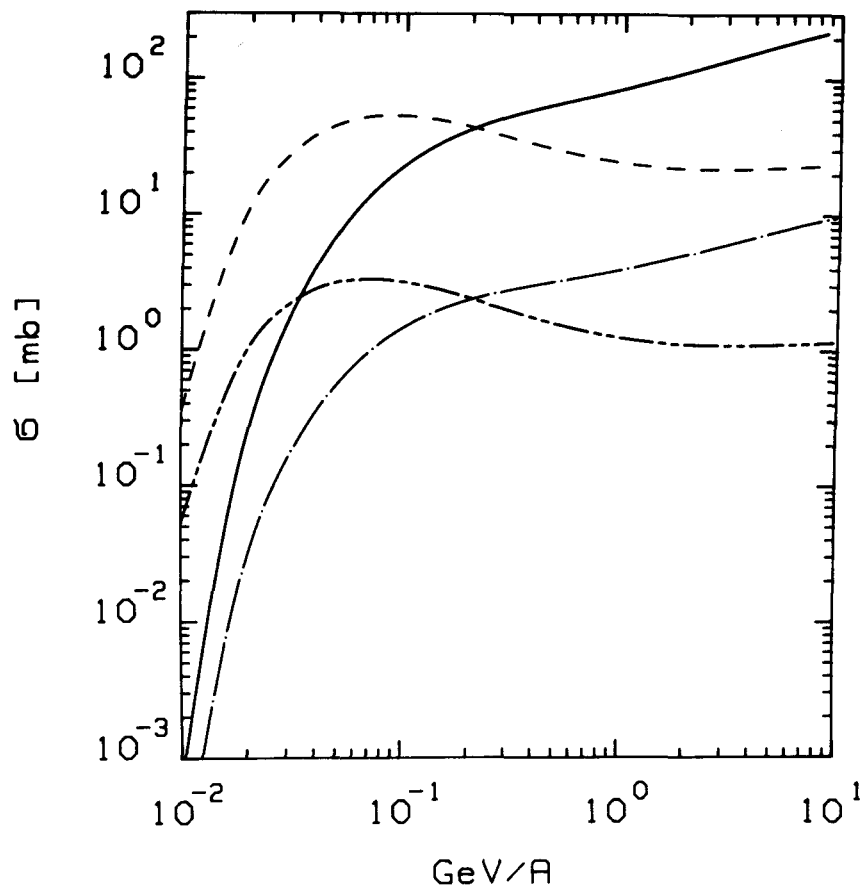
———— Rel.Coul.Exc.

- · - · - SAM (Partialwellen)

$\lambda = 2$

----- Rel.Coul.Exc.

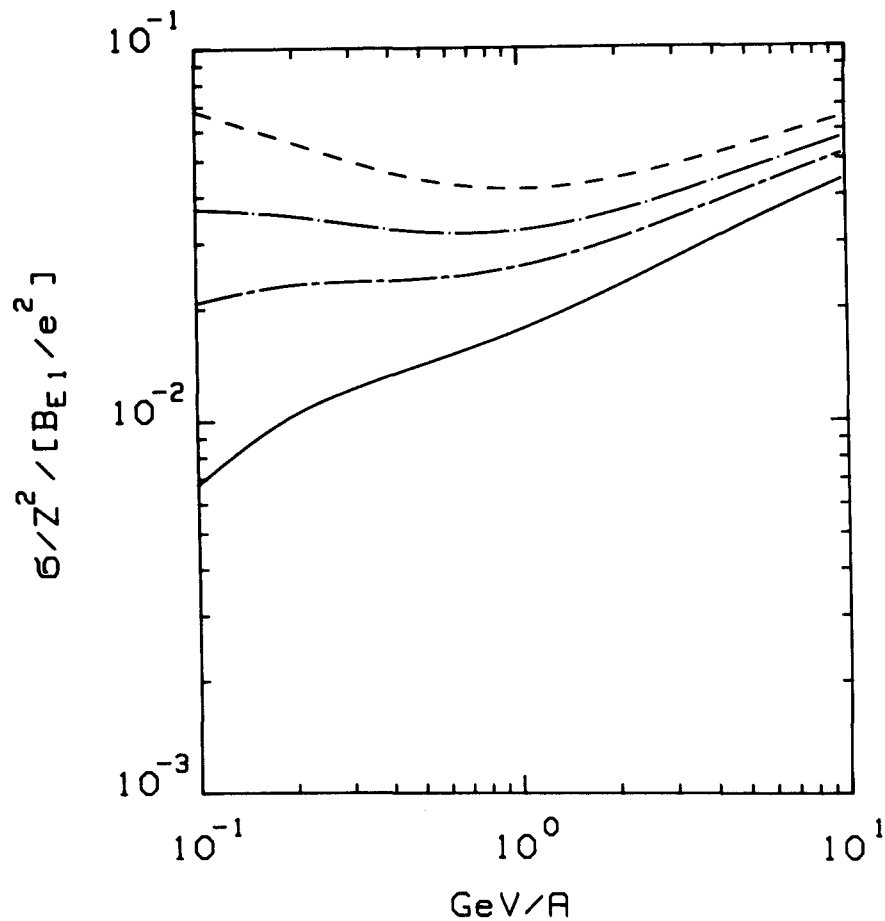
..... SAM (Partialwellen)



FIGUR III.vi

Vergleich der Anregungswahrscheinlichkeiten der Riesenresonanzen in Blei, bei Verwendung der Targets He und Ne.

$\lambda=1$  ————— Ne  
 $\lambda=2$  - - - - - Ne  
 $\lambda=1$  — · — · — · He  
 $\lambda=2$  - - - - - He



FIGUR III.vii

Reduzierter Wq. für die Anregung der Dipolresonanz im Target:  
den tatsächlichen Wq. erhält man durch Multiplikation mit  $Z_{\text{Proj}}^2$  und mit dem  $B(E1)/e^2$  (fm<sup>2</sup>) Wert des Targets.

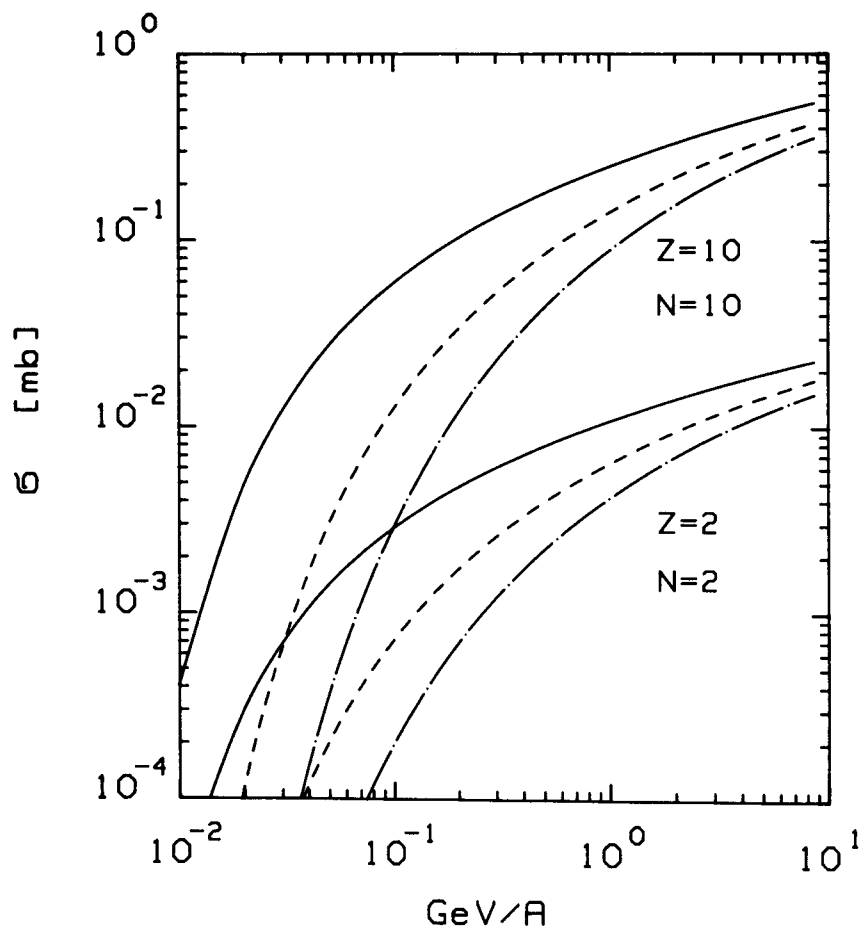
Anregungsenergie der Resonanz:

- 5 MeV
- 7.5 MeV
- · — · — 10.0 MeV
- 15.0 MeV

## M1 Anregung

Als letzte Anwendung sei die Möglichkeit der Anregung der magnetischen Dipol Resonanz durch Coulombkräfte erwähnt. Als Targetkern wurde Blei gewählt, als Projektil Helium und Neon. Die M1 Stärke wurde als  $8.5 \mu_o^2$  angenommen (BR80). Gezeigt ist der totale Wirkungsquerschnitt für die Anregungsenergien 5, 10 und 15 MeV (Figur III.viii). Die Energieabhängigkeit des Wirkungsquerschnitts hat die gleiche Form wie bei der Anregung der elektrischen Dipol Resonanz, doch ist der absolute Querschnitt etwa einen Faktor 100 kleiner.





FIGUR III.viii

Anregung der M1 Resonanz in Blei durch die Projektile Neon und Helium.

Der Wq. ist für drei verschiedene Anregungsenergien gezeigt.

$$B(M1) = 8.5 \mu_0^2$$

— · — · —	Ex.= 5	MeV
- - - - -	Ex.=10	MeV
—————	Ex.=15	MeV

Die Untersuchung des Deuteronenaufbruchs bei 15 MeV zeigte, daß in den Bereichen des Phasenraums, in denen das Spectator break up Modell den experimentell gemessenen Wirkungsquerschnitt unterschätzt, die Coulombdissoziation den größten Teil des Wirkungsquerschnittes wiedergibt. Beide Modelle ergänzen sich also, doch es ist nicht klar, wie sie zu einer Theorie vereinigt werden können. Einfache DWBA Ansätze können offenbar die Aufbruchsreaktion nicht wirklich befriedigend wiedergeben. Möglicherweise kann die Berücksichtigung zweistufiger Prozesse eine Verbesserung der Situation bewirken, doch ist es letztlich erforderlich die vollständige 3-Körpertheorie anzuwenden.

Die Untersuchung des totalen Wirkungsquerschnittes für Deuteronenaufbruch konnte das Ergebnis der Experimente von Matsuoka (MA80) erklären; es wurde gezeigt, daß der Beitrag der Coulombdissoziation zum Aufbruch, bei nicht zu kleinen Energien des Deuterons wie  $Z^2$  wächst und dem Beitrag vom direkten Aufbruch, der entsprechend dem Serber Modell wie  $A^{1/3}$  wächst, überlagert werden muß. Experimente mit 100 MeV Deuteronen sollten den Effekt der Coulombdissoziation noch deutlicher zeigen.

Die Ausdehnung der Coulombdissoziation auf relativistische Energien verschaffte einen Überblick über die Energieabhängigkeit des totalen Wirkungsquerschnittes. Es wäre interessant experimentell zu testen, ob tatsächlich bei 2 GeV/A ein Minimum im Wirkungsquerschnitt vorliegt.

Es konnte gezeigt werden, daß die Theorie der relativistischen Coulombanregung und die Weizsäcker Williams Methode für E1 Anregung exakt übereinstimmen. Der Vergleich mit nichtrelativistischen Rechnungen zeigt, daß bei beiden Theorien die Coulombabstoßung für kleine Energien berücksichtigt werden muß.

### Phasenraumfaktor

Der Wirkungsquerschnitt für den Aufbruch von Deuteronen ist im Schwerpunktsystem:

$$A.1 \quad \frac{d^3 \sigma}{d\Omega_p d\Omega_n dE_p} = 2\pi \frac{\mu_d}{q_d} \rho_{phase} |T_{fi}|^2$$

mit  $\vec{q}_d = \hbar \vec{k}_i$  dem Impuls des Deuterons im Eingangskanal,

mit  $\mu_d = \frac{m_T m_d}{m_T + m_d}$  der reduzierten Masse des d-Target Systems

wobei  $m_d = 2 m = 2 \cdot 939 \text{ MeV}/c^2$

Der Phasenraumfaktor  $\rho_{phase}$  ist von Ohlsen (OH65) angegeben worden:

$$A.2 \quad \rho(E_p) dE_p d\Omega_p d\Omega_n = \frac{h^{-6} m_p m_n m_T p_p p_n}{(m_n + m_T) + m_n \frac{(\vec{p}_p - \vec{P})^2}{p_n^2}} dE_p d\Omega_p d\Omega_n$$

wobei  $\vec{p}_p = \hbar \vec{k}_p$  und  $\vec{p}_n = \hbar \vec{k}_n$  die Impulse von Proton und Neutron im Ausgangskanal sind.  $\vec{P}$  ist der Gesamtimpuls des Systems, insbesondere ist  $\vec{P} = \vec{0}$  im Schwerpunktsystem. Für sehr große Targetmassen,  $m_T \gg m_p, m_n$  vereinfacht sich der Phasenraumfaktor zu:

$$\rho_{phase} = \frac{m_d m_p}{h^6} p_p p_n \quad A.3$$

### Berücksichtigung der endlichen Targetmasse

-----

Um den zweifach differentiellen Wirkungsquerschnitt für Coulombdissoziation zu bestimmen, berechnen wir zunächst  $\frac{d^3 \sigma}{d\Omega_p d\Omega_n dE_p}$  und integrieren anschließend über  $\Omega_n$ .

Hier wollen wir zeigen, wie man bei endlicher Targetmasse die Eingangsvariablen  $K_d$  und  $K_p$  sowie  $k$  zur Berechnung des Matrixelementes (I.11) aus der Laborenergie  $E_d^l$  des Deuterons im Eingangskanal, der c.m. Energie  $E_p^c$  des Protons im Ausgangskanal, sowie der c.m. Winkel  $\Omega_p$  und  $\Omega_n$  erhält.

$$\vec{v}_d^l - \vec{v}_T^l = \vec{v}_d^c - \vec{v}_T^c = \vec{v} \quad A.4a$$

$$|\vec{K}_i| = \frac{\mu_d}{\hbar} |\vec{v}| = \frac{\mu_d}{\hbar} \sqrt{\frac{2E_d^l}{m_d}} \quad A.4b$$

Impulserhaltung fordert für das c.m. System:

$$A.5 \quad \vec{p}_T^c = -(\vec{p}_n^c + \vec{p}_p^c)$$

Die Energiebilanz nach dem Aufbruch ist :

$$A.6a \quad E = E_T + E_p + E_n$$

mit

$$A.6b \quad E = \frac{\hbar^2 K_i^2}{2 \mu_d} - \epsilon_d$$

Durch Einsetzen von A.5 in A.6 erhält man den Neutronimpuls:

$$A.7a \quad p_n = \sqrt{\left(s^2 \left(\frac{mm_T}{m+m_T}\right)^2 - 1\right) p_p^2 + 2E \frac{mm_T}{m+m_T}} - s p_p \frac{mm_T}{m+m_T}$$

wobei

$$A.7b \quad s = \frac{\vec{p}_p \cdot \vec{p}_n}{|\vec{p}_p| |\vec{p}_n|}$$

So können wir den Impuls des Deuteronschwerpunktes

$$\vec{k}_d = \vec{k}_p + \vec{k}_n \quad \text{A.8a}$$

und den Relativimpuls im p-n System angeben:

$$\vec{k} = .5 (\vec{k}_p - \vec{k}_n) \quad \text{A.8b}$$

Aus A.6 kennen wir den Betrag des Rückstoßimpulses

$$|\vec{k}_T| = \frac{\sqrt{2E_T m_T}}{\hbar} \quad \text{A.9}$$

Da die Geschwindigkeiten von Deuteronschwerpunkt und Target antiparallel zueinander sind, ist die Relativgeschwindigkeit im Ausgangskanal:

$$|\vec{v}| = v_d - v_T \quad \text{A.10a}$$

oder

$$\vec{K}_f = \frac{M_d}{m_d} \vec{k}_d - \frac{M_d}{m_T} \vec{k}_T \quad \text{A.10b}$$

Aus der Relativbewegung von Deuteron und Target vor dem Aufbruch ist die Energie

$$A.11 \quad \frac{\hbar^2}{2 \mu_d} (K_i^2 - K_f^2) = \frac{\hbar^2}{m} (\alpha^2 + k^2)$$

in Anregungsenergie des p-n Systems umgewandelt worden.

Coul.diss. bei höheren Energien (nichtrelativistisch)

---

Der totale Wirkungsquerschnitt für Coulombdissoziation ist in der semiklassischen Näherung :

$$A.12a \quad \sigma_{tot} = \left( \frac{Ze}{\hbar v} \right)^2 B(E1) f_{E1}(\theta, \xi)$$

$$A.12b \quad \xi = \eta_f - \eta_i$$

$$A.12c \quad \eta_{i,f} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar v_{i,f}} = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} E_{i,f}^{-1/2}$$

$\xi$  kann durch die Anregungsenergie  $\Delta E$  ausgedrückt werden.

$$\xi = \frac{Z_1 Z_2 e^2}{2\hbar} \sqrt{\frac{m}{2}} E_1^{-3/2} |\Delta E| \quad \text{A.13}$$

Für sehr große Projektilenergien wird  $\xi$  also sehr klein.

Im Limes  $\xi$  gegen Null gilt (AL56;II.E.59):

$$f_{E1} \rightarrow \frac{32 \pi^2}{9} \text{LOG} \left( \frac{2}{\delta \xi} (1 - \pi \xi) \right) \quad \text{A.14a}$$

$$\delta = e^C = 1.781 ; C = \text{Eulersche Konstante} \quad \text{A.14b}$$

Setzt man A.13 in A.14 ein so folgt nach einigem Umformen:

$$\sigma_{tot} \rightarrow \text{const.} \frac{8 \pi^2}{3} m \frac{B(E1)}{e^2} \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar} \right)^2 \frac{\text{LOG}(E_1)}{E_1} \quad \text{A.15}$$

Der totale Wirkungsquerschnitt geht also in der nichtrelativistischen Theorie für große Energien gegen Null.



### Details der Partialwellenzerlegung

---

Das Polarisierungspotential  $V_{p o 1}$  ist nach I.38

$$B.1 \quad V_{p o 1} = \frac{Ze^2}{|\vec{R} + 1/2 \vec{r}|} - \frac{1}{R}$$

Entwickeln nach Kugelflächenfunktionen (mit  $R > r/2$ ) führt zu (JA75;3.70):

$$B.2a \quad V_{p o 1} = Ze^2 \left\{ 4\pi \sum_{\ell m} \frac{1}{2\ell+1} \frac{(1/2r)^\ell}{R^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\hat{r}) Y_{\ell m}(\hat{R}) - \frac{1}{R} \right\}$$

$$B.2b \quad = Ze^2 \left\{ 4\pi \sum_{\ell=1}^{\infty} \sum_m \frac{1}{2\ell+1} \frac{(1/2r)^\ell}{R^{\ell+1}} Y_{\ell m}^*(\hat{r}) Y_{\ell m}(\hat{R}) \right\}$$

Da  $r$  klein gegen  $R$  ist, sieht man hier (zumindest qualitativ), daß es hinreichend ist, bis zum Dipolterm mit  $\ell=1$  zu entwickeln.

Einsetzen in I.39 ergibt für die T-Matrix:

$$B.3 \quad T = \frac{4\pi}{3} (-i) Ze^2 \sqrt{\frac{8\pi\alpha}{1-\alpha r_{ot}}} \frac{k}{(k+\alpha^2)^2} * \\ * \sum Y_{\ell m}^*(\hat{r}) \langle X_{\vec{R}_f}^- | \frac{Y_{\ell m}(\hat{R})}{R^2} | X_{\vec{R}_i}^+ \rangle$$

Das letzte Matrixelement ist (AL56;II.B.45):

$$\begin{aligned}
 \langle X_{R_f}^- | \frac{Y_{1m}(\hat{R})}{R^2} | X_{R_i}^+ \rangle &= (4\pi)^{3/2} \sum_{\substack{l_i l_f \\ m_i m_f}} i^{l_i - l_f} (-1)^{m_i} e^{i(\sigma_i + \sigma_f)} * \\
 &* [(2l_i + 1)(2l_f + 1)3]^{1/2} \begin{pmatrix} l_i & l_f & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l_i & l_f & 1 \\ m_i & -m_f & m \end{pmatrix} * \\
 &* Y_{l_i, -m_i}(\hat{K}_i) Y_{l_f, m_f}(\hat{K}_f) M_{l_i, l_f}^{-2}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

mit den Coulombmatrixelementen

$$M_{l_i, l_f}^{-\lambda-1} = \frac{1}{K_i K_f} \int_0^\infty F_{l_i, l_f}(K_f R) R^{-\lambda-1} F_{l_i, l_f}(K_i R) dR \tag{B.5a}$$

Die  $F_{l_i, l_f}$  können durch hypergeometrische Funktionen dargestellt werden (AL56;II.B.51):

$$F_{l_i, l_f}(KR) = e^{-\pi/2 \eta} \frac{|\Gamma(1+i\eta)|}{2\Gamma(2i+2)} (2KR)^{1+i} e^{iKR} {}_1F_1(1+i-i\eta, 2i+2; 2iKR) \tag{B.5b}$$

Einsetzen von (B.4) in (B.3) und Vertauschen der Summation über  $m$  mit der über  $l_i$  und  $l_f$  sowie Ausnutzen der Symmetrien der 3-J Symbole und der Kugelflächenfunktionen führt dann zu (I.45).

Kugelflächenfunktionen und den Coulombmatrixelementen auf.

Wir werden zunächst zeigen, wie die Coulombmatrixelemente durch Rekursionsformeln gewonnen werden können; anschließend werden wir angeben, welche Algorithmen für Kugelflächenfunktionen und 3-J Symbole angewandt wurden.

Ausgangspunkt sind die Monopolmatrixelemente  $M_{\ell_i \ell_f}^{-1}$ . Sie werden mit Hilfe der Rekursionsformel (AL56;II.B.66) errechnet:

$$\text{B.6a} \quad y_1 M_{l+1, l+1}^{-1} + y_2 M_{l, l}^{-1} + y_3 M_{l-1, l-1}^{-1} = 0$$

$$\text{B.6b} \quad y_1 = 2l(l+1+i\eta_i)(l+1+i\eta_f)$$

$$\text{B.6c} \quad y_2 = -(2l+1) \left[ \frac{\eta_i + \eta_f}{\eta_i \eta_f} l(l+1) + 2\eta_i \eta_f \right]$$

$$\text{B.6d} \quad y_3 = (2l+2)(l+1+i\eta_i)(l+1+i\eta_f)$$

$$M_{1,1_f}^{-\lambda-1} = \frac{K^{\lambda-1}}{4 \eta^\lambda} \frac{2 \pi}{\Gamma(\lambda+1-\mu)} e^{-(1/\eta + \pi/2) \xi} \xi^{(\lambda-\mu-1)/2} \left(\frac{21}{\eta}\right)^{-(\lambda+\mu+1)/2}$$

B.7a

Die Matrixelemente nehmen also für sehr große  $l$  wie

$$M_{1,1_f}^{-\lambda-1} \propto e^{-1 \xi / \eta}$$

B.7b

ab. Diese Beziehung ermöglicht die Definition des Startindex  $l_{ax}$ ; wir wählten:

$$l_{ax} = 100 \frac{\sqrt{\eta_i \eta_f}}{\eta_f - \eta_i}$$

B.8

Für das Matrixelement mit dem Index  $l_{ax}$  wählten wir den (beliebigen) Startwert  $10^{**}(-65)$ , das Element mit dem Index  $l_{ax}+1$  ist festgelegt durch die asymptotische Relation (SA71),

$$\frac{M_{l_{ax}+1, l_{ax}+1}^{-1}}{M_{l_{ax}, l_{ax}}^{-1}} = \frac{M_{l_{ax}+1, l_{ax}}^{-1}}{M_{l_{ax}-1, l_{ax}-1}^{-1}}$$

B.9

die durch Iteration gelöst wurde.

Das Monopolmatrixelement mit dem Index 0 wurde direkt be-

rechnet (AL56;II.B.56), so konnten alle Matrixelemente normiert werden.

$$M_{1,1}^{-1} = (K_i - K_f)^{-2} \left( \frac{\xi}{\eta_i + \eta_f} \right)^{i(\eta_i + \eta_f)} \frac{|\Gamma(1+1+i\eta_i)| |\Gamma(1+1+i\eta_f)|}{(2l+1)!} *$$

$$B.10 \quad * e^{-\eta/2\xi} (-x_0)^l F(1+1-i\eta_i, 1+1-i\eta_f, 2l+2; x_0)$$

$$x_0 = - \frac{4\eta_i\eta_f}{\xi^2}$$

Für jedes  $l$  können die Dipolmatrixelemente direkt aus den Monopolmatrixelementen erhalten werden (AL56;II.B.68):

$$B.11a \quad 2M_{1,1+1}^{-2} = y_1 M_{1,1}^{-1} + y_2 M_{1+1,1+1}^{-1}$$

$$B.11b \quad y_1 = K_f \frac{|1+1+i\eta_f|}{l+1}$$

$$B.11c \quad y_2 = -K_i \frac{|1+1+i\eta_i|}{l+1}$$

Die 3-J Symbole wurden direkt aus der Racah Formel (ED57;3.6.12) berechnet. Alle auftretenden Produkte sowie die Fakultäten wurden logarithmiert. Ein Vergleich mit semiklassischen (asymptotischen) bzw mit exakten, durch Rekursion bestimmten 3-J's (SCHU75) zeigte hervorragende Übereinstimmung.

Die Kugelflächenfunktionen wurden nach (ED57;2.5.29) berechnet:

$$Y_{l,m}(\theta, \varphi) = (-1)^m \left[ \frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{1/2} P_l^m(\cos(\theta)) e^{im\varphi} \quad \text{B.12}$$

Das Problem bestand also darin, die zugeordneten Legendre Polynome auch für große  $l$  zu bestimmen. Wir benutzten dazu folgende Rekursionsformel (BU67):

$$P_{n+1}^m(x) = (1 + M_n^m) \times P_n^m(x) - M_n^m P_{n-1}^m(x) \quad \text{B.13a}$$

$$M_n^m = \frac{n+m}{n-m+1} \quad \text{B.13b}$$

mit den Anfangswerten für die Rekursion :

$$P_m^m(x) = \frac{(2m)!}{2^m m!} \quad \text{B.14a}$$

$$P_{m+1}^m(x) = \frac{(2m+1)!}{2^m m!} x \quad \text{B.14b}$$

### Relativistische Coulombanregung

-----

Nach (AL79;3.1) ist der totale Wirkungsquerschnitt für Coulombanregung durch ein relativistisches Projektil

$$C.1 \quad \sigma_{i,f} = \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar c} \right)^2 \sum k^{2(\lambda-1)} B(\pi \lambda) / e^2 |G_{\pi \lambda \mu}(\frac{c}{v})|^2 g_{\mu}(\xi(R))$$

mit der Funktion  $g_{\mu}(\xi)$ , die nur vom Adiabazitätsparameter abhängt:

$$C.2 \quad g_{\mu}(\xi) = \pi \xi^2 [|K_{\mu+1}(\xi)|^2 - |K_{\mu}(\xi)|^2 - \frac{2\mu}{\xi} K_{\mu+1} K_{\mu}]$$

Die Änderung der Feldstärke aufgrund der relativistischen Geschwindigkeit wird durch die Funktion  $G_{\pi \lambda \mu}$  berücksichtigt:

$$C.3a \quad G_{E \lambda \mu}(\frac{c}{v}) = i^{\lambda+\mu} \frac{\sqrt{16\pi}}{\lambda(2\lambda+1)!!} \left[ \frac{(\lambda-\mu)!}{(\lambda+\mu)!} \right] \left( \left( \frac{c}{v} \right) - 1 \right)^{-1/2} * \\ * \left[ \frac{(\lambda+1)(\lambda+\mu)}{2\lambda+1} P_{\lambda-1}^{\mu}(\frac{c}{v}) - \frac{\lambda(\lambda-\mu+1)}{2\lambda+1} P_{\lambda+1}^{\mu}(\frac{c}{v}) \right]$$

$$C.3b \quad G_{M \lambda \mu} = i^{\lambda+\mu+1} \frac{\sqrt{16\pi}}{\lambda(2\lambda+1)!!} \left[ \frac{(\lambda-\mu)!}{(\lambda+\mu)!} \right]^{1/2} \left( \left( \frac{c}{v} \right) - 1 \right)^{-1/2} \mu P_{\lambda}^{\mu}(\frac{c}{v})$$

Für sehr hohe Energien ( $\gamma \rightarrow \infty$ ) ergeben sich als

Grenzfälle:

$$\mu \geq 1$$

$$G_{E \lambda \mu} = i^{\lambda + \mu} \frac{\mu}{\lambda} \frac{\sqrt{4\pi}}{\mu! (2\lambda + 1)!!} \left[ \frac{(\lambda + \mu)!}{(\lambda - \mu)!} \right] (2\gamma)^{1 - \mu} = i G_{M \lambda \mu} \quad C.4a$$

$$G_{E \lambda 0} = i^{\lambda} \frac{(2\lambda + 2)\sqrt{4\pi}}{(2\lambda + 1)!!} (2\gamma)^{-1} \quad C.4b$$

$$G_{M \lambda 0} = 0 \quad C.4c$$

Weiter gilt in diesem Grenzfall:

$$g_{\mu}(\xi) = \pi (\mu - 1) \left( \left( \mu - 2 \right) ! \right)^2 \left( \frac{2}{\xi} \right)^{2\mu - 1} \quad \mu > 1 \quad C.5a$$

$$g_{\mu}(\xi) = \pi \operatorname{LOG} \left( \left( \frac{\alpha}{\xi} \right)^2 + 1 \right) \quad \mu = 1 \quad C.5b$$

$$g_{\mu}(\xi) = \pi \quad \mu = 0 \quad C.5c$$

wobei  $\alpha = .681085$  mit der Euler'schen Konstante in Verbindung steht. Von C.5a lesen wir ab, daß die größten Beiträge von  $\mu = \pm \lambda$  kommen.



In diesem Limit sieht man, daß der Wirkungsquerschnitt für Multipole  $\lambda$  größer als 1 einer Konstante zustrebt und nur der Wirkungsquerschnitt für die Dipolanregung logarithmisch divergiert:

$$C.5d \quad \sigma_{\pi \lambda} = \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{B(\pi \lambda)}{e^2 R_{m+n}^{2\lambda}} \pi R_{m+n}^2 \frac{8 \pi (2\lambda)!}{\lambda^2 (\lambda-1) [(2\lambda+1)!!]^2} \quad \lambda \geq 2$$

$$C.5e \quad \sigma_{\pi \lambda} = \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{B(\pi \lambda)}{e^2} \pi^2 \frac{16}{9} \text{LOG} \left( \frac{\alpha}{\xi} \right)^2 \quad \lambda=1$$

Als Spezialfall betrachten wir nun explizit den Wirkungsquerschnitt für  $\lambda = 1$ .

$$C.6a \quad g_0 = \pi \xi^2 [K_1^2 - K_0^2]$$

$$C.6b \quad g_1 = \pi \xi^2 [K_0^2 - K_1^2 + \frac{2}{\xi} K_1 K_0]$$

$$C.6c \quad |G_{E10}|^2 = \frac{16}{9} \pi \left( \left( \frac{c}{v} \right)^2 - 1 \right)$$

$$C.6d \quad |G_{E11}|^2 = \frac{8}{9} \pi \left( \frac{c}{v} \right)^2$$

Damit ist der Wirkungsquerschnitt:

$$\sigma_{E1} = \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{B(E1)}{e^2} \frac{32 \pi^2}{9} \left( \frac{c}{v} \right)^2 \left[ \xi K_0 K_1 - \frac{v^2}{2c^2} \xi^2 (K_1^2 - K_0^2) \right] \quad C.7$$

Für einen Vergleich mit der Weizsäcker Williams Methode ist es vorteilhaft, den Wirkungsquerschnitt in einen Teil mit

$\mu = 0$  und einen mit  $\mu = \pm 1$  zu zerlegen.

$$\sigma_{E\mu \pm 1} = \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{B(E1)}{e^2} \frac{16 \pi^2}{9} \left( \frac{c}{v} \right)^2 \left[ \xi K_0 K_1 - \frac{\xi^2}{2} (K_1^2 - K_0^2) \right] \quad C.8a$$

$$\sigma_{E10} = \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{B(E1)}{e^2} \frac{16 \pi^2 \xi^2}{9} [K_1^2 - K_0^2] \frac{1}{8} \left( \frac{c}{v} \right)^2 \quad C.8b$$

### Weizsäcker Williams Methode

-----

Der Wirkungsquerschnitt ist bei der Weizsäcker Williams Methode gegeben durch:

$$C.9 \quad \sigma_{E1} = N(\omega) \frac{16 \pi^3}{9} \frac{\omega}{\hbar c} B(E1)$$

Die Zahl der virtuellen Quanten  $N(\omega)$  erhält man aus den Frequenzspektren von Puls P1 und Puls P2:

$$C.10 \quad N(\omega) = \frac{1}{\hbar \omega} \left( \frac{dI_1}{d\omega} + \frac{dI_2}{d\omega} \right)$$

Die Spektren werden durch Integration von (II.22a) bzw (II.22b) bestimmt:

$$C.11a \quad \frac{dI_1}{d\omega} = \frac{2}{\pi} \frac{(Ze)^2}{c} \left( \frac{c}{v} \right)^2 \left[ \xi K_0 K_1 - \frac{\xi^2}{2} (K_1^2 - K_0^2) \right]$$

$$C.11b \quad \frac{dI_2}{d\omega} = \frac{2}{\pi} \frac{(Ze)^2}{c} \left( \frac{c}{v} \right)^2 \left( 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right) \frac{\xi^2}{2} [K_1^2 - K_0^2]$$

Damit ist der Wirkungsquerschnitt hervorgerufen durch Puls 1 bzw Puls 2:

$$\sigma_{P1} = \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{B(E1)}{e^2} \frac{32 \pi^2}{9} \left( \frac{c}{v} \right)^2 \left[ \xi K_0 K_1 - \frac{\xi^2}{2} (K_1^2 - K_0^2) \right] \quad C.12a$$

C.12b

$$\sigma_{P2} = \left( \frac{Z_1 e^2}{\hbar c} \right)^2 \frac{B(E1)}{e^2} \frac{16 \pi^2 \xi^2}{9} [K_1^2 - K_0^2] \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{c}{v} \right)^2$$

Wir sehen, daß der Wirkungsquerschnitt von Puls 1 mit den Anregungen der Zustände  $\mu = \pm 1$  (C.8a) identifiziert werden kann. Puls 2 verursacht die Anregung des  $\mu = 0$  Unterzustands (C.8b).

- AB72 M.ABRAMOWITZ, I.A.STEGUN  
"HANDBOOK OF MATHEMATICAL FUNCTIONS"  
Dover, New York, 1972
- AL76 E.O.ALT, W.SANDHAS, H.ZANKEL, H.ZIEGELMANN  
Phys.Rev.Lett.37 (1976) 1537
- AL56 K.ALDER, A.BOHR, T.HUUS, B.MOTTELSON, A.WINTHER  
Rev.Mod.Phys.28 (1956) 432
- AL71 K.ALDER, D.TRAUTMANN  
Ann.of.Phys. 66 (1971), 884-904
- AL75 K.ALDER, A.WINTHER  
"ELECTRO MAGNETIC EXCITATION"  
North-Holland, Amsterdam-Oxford, 1975
- AL79 K.ALDER, A.WINTHER  
Nuc.Phys.A319 (1979) 518-532
- BA76 G.BAUR, D.TRAUTMANN  
Phys.Rep. 25C (1976) 293
- BI65 L.C.BIEDENHARN, P.J.BRUSSAARD  
"COULOMB EXCITATION"  
Clarendon Press, Oxford, 1965.
- BI80 J.BISPLINGHOFF, J.ERNST, J.KLEINFELLER, T.MAYER-KUCKUK  
Proc.Int.Conf.Nucl.Physics, Berkeley, California, 1980, Aug.24-30  
Vol. 1, p 905
- BRG80 R.A.BROGLIA, C.H.DASSO, H.ESBENSEN, A.VITTURI, A.WINTHER  
Nuc.Phys.A345 (1980) 263
- BR80 G.E.BROWN, S.RAMAN  
Comments Nucl.Part.Phys.1980 Vol.9, 79-88
- BUE81 M.BUENERD, D.LEBRUN  
Preprint 1981
- BU67 W.BUNDKE  
"12STELLIGE TAFEL DER LEGENDRE POLYNOME"  
Bibliographisches Institut, Mannheim, 1967
- BU81 A.BUDZANOWSKI  
Preprint, 1981
- BW79 J.M.BLATT, V.F.WEISSKOPF  
"THEORETICAL NUCLEAR PHYSICS"  
Springer Verlag, New York, 1979
- DA47 S.M. DANCOFF  
Phys.Rev.72 (1947) 1017
- DE81 P.DECOWSKI, H.P.MORSCH  
"Coulomb Excitation of the Giant Dipole  
Resonance in Hadron Scattering", Preprint 1981

- ED57 A.R.EDMONDS  
"ANGULAR MOMENTUM IN QUANTUM MECHANICS"  
Princeton, New Jersey, 1957
- FR64 W.E.FRAHN, R.H.VENTER  
Ann.of.Phys. 24 (1963) 243
- GE80 H.GEMMEKE, B.DELUIGI, D.SCHOLZ, L.LASSEN  
Phys.Lett.96B (1980) 47
- HA62 J.M. HANSTEEN, I. KANESTROM  
Nuc.Phys. 46 (1963) 303-320
- HE80 H.H.HECKMAN, P.J.LINDSTROM et al  
Proc.Int.Conf.Nucl.Physics,Berkeley,California,1980,Aug.24-30  
Vol. 1,p 220
- JA75 J.D.JACKSON  
"CLASSICAL ELECTRODYNAMICS"  
John Wiley & Sons, New York, 1975
- KL81 J.KLEINFELLER, J.BISPLINGHOFF, J.ERNST, T.MAYER-KUCKUK  
G.BAUR, B.HOFFMANN, R.SHYAM  
F.RÖSEL, D.TRAUTMANN  
Nucl.Phys. (in print)
- LA71 L.D.LANDAU & E.M.LIFSHITZ  
"COURSE OF THEORETICAL PHYSICS"  
Vol.4, Part 1  
"RELATIVISTIC QUANTUM THEORY"  
Pergamon Press, Oxford, 1971
- LA75 L.D.LANDAU & E.M.LIFSCHITZ  
"THEORETISCHE PHYSIK KURZGEFASST"  
Band 1, "MECHANIK, ELEKTRODYNAMIK"  
Carl Hanser Verlag,München,Wien,1975
- LA81 M.LACOMBE, B.LOISEAU, R.VINH MAU  
J.COTE, P.PIRES  
R.de.TOURREIL  
Phys.Lett. 101 (1981) 139
- MA80 N.MATSUOKA, M.KONDO, A.SHIMIZU, T.SAITO  
S.NAGAMICHI, H.SAKAGUCHI, A.GOTO, F.OHTANI  
Nucl.Phys. A345 (1980) 1-12
- MU51 C.J. MULLIN, E. GUTH  
Phys.Rev.82 (1951) 141
- NÖ80 W.NÖRENBERG, H.A.WEIDENMÜLLER  
"INTRODUCTION TO THE THEORY OF HEAVY-ION COLLISIONS"  
Springer Verlag, Berlin, 1980
- PA78 J.PAMPUS, J.BISPLINGHOFF, J.ERNST, J.RAMA RAO, G.BAUR  
F.RÖSEL, D.TRAUTMANN  
Nucl.Phys.A311 (1978) 141

- RI80 P.RING, P.SCHUCK  
"THE NUCLEAR MANY BODY PROBLEM"  
Springer Verlag, New York, 1980
- RY72 F.RYBICKI, N.AUSTERN  
Phys.Rev.C 6 (1972) 1525
- SA71 M.SAMUEL, U.SMILANSKY  
Computer Phys. Communications 2 (1971) 455-469
- SCHM74 E.W.SCHMID, H.ZIEGELMANN  
"THE QUANTUM MECHANICAL THREE-BODY PROBLEM"  
1974, Vieweg&Sohn Verlagsgesellschaft, Braunschweig
- SCHU75 K.SCHULTEN, R.G.GORDON  
Jour.Math.Phys. 16 (1975), 1961-1970  
und 1971-1988
- SE47 R.SERBER  
Phys.Rev. 72 (1947) 1008
- SI75 A.G.SITENKO, V.K.TARTAKOVSKII  
"LECTURES ON THE THEORY OF THE NUCLEUS"  
Pergamon Press, Oxford, 1975
- SN72 I.N.SNEDDON  
"THE USE OF INTEGRAL TRANSFORMATION"  
Mc Graw-Hill, 1972
- SO60 A.SOMMERFELD  
"ATOMBAU UND SPEKTRALLINIEN"  
Vieweg&Sohn, Braunschweig, 1960
- UN78 J.UNTERNÄHRER, J.LANG, R.MÜLLER  
Phys. Rev. Lett. 40, 1077, (1978)

Das Thema der vorliegenden Arbeit wurde mir von Dr.G.Baur gestellt, dem ich zu großem Dank verpflichtet bin, da er mich in jeder Phase der Entstehung dieser Arbeit durch Erklärungen, Anregungen und Diskussionen unterstützte.

Prof.Dr.J.Speth danke ich für die freundliche Aufnahme in das Institut für Kernphysik sowie für die hervorragenden Arbeitsmöglichkeiten dort.

Durch die Hilfe von Herrn E.Brökel konnte ich im Rahmen der Erfordernisse die Möglichkeiten des Rechenzentrums der KFA voll nutzen. Herrn Brökel verdanke ich auch die Anregung zu dem Plotprogramm auf dem HP9835, mit dem alle Zeichnungen dieser Arbeit erstellt worden sind.

Diese Arbeit entstand unter Verwendung des Textverarbeitungsprogramms RUNOF.